

**UBND TỈNH HẢI DƯƠNG
TRƯỜNG CAO ĐẲNG HẢI DƯƠNG**

GIÁO TRÌNH

**MÔN HỌC: TỰ CHỌN TOÁN 2
NGÀNH: GIÁO DỤC TIỂU HỌC
TRÌNH ĐỘ: CAO ĐẲNG**

*Ban hành kèm theo Quyết định số: /QĐ-... ngàytháng.... năm.....
..... của*

Hải Dương, năm 2017

TUYÊN BỐ BẢN QUYỀN

Tài liệu này thuộc loại sách giáo trình nên các nguồn thông tin có thể được phép dùng nguyên bản hoặc trích dùng cho các mục đích về đào tạo và tham khảo.

Mọi mục đích khác mang tính lệch lạc hoặc sử dụng với mục đích kinh doanh thiếu lành mạnh sẽ bị nghiêm cấm.

LỜI NÓI ĐẦU

Để góp phần đổi mới công tác đào tạo và bồi dưỡng giáo viên tiểu học, tác giả đã biên soạn lại nội dung môn học này làm tài liệu tham khảo cho sinh viên ngành Sư phạm Tiểu học hệ Cao đẳng. Cuốn sách này nhằm nâng cao năng lực chuyên môn, nghiệp vụ, cập nhật những đổi mới về nội dung, phương pháp dạy học và kiểm tra, đánh giá kết quả giáo dục tiểu học hiện nay.

Điểm mới của tài liệu là cụ thể hóa các kiến thức toán cao cấp tưởng như xa rời với việc dạy và học Toán ở Tiểu học trở lên gần gũi, đồng thời giúp người giáo viên tiểu học thấy được một số vấn đề tổng quan trong dạy học toán ở tiểu học.

Tài liệu gồm 3 chương:

Chương 1: Nhóm

Chương 2: Vành – Trường

Chương 3: Phương trình. Bất phương trình

Để nâng cao chất lượng của sách, chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo, các sinh viên sư phạm và bạn đọc trong quá trình sử dụng cuốn sách này.

Hải dương, ngày tháng năm 2017

Tác giả

MỤC LỤC

	Nội dung	Trang
Lời nói đầu		3
	Chương I. Nhóm	
§1.	Phép toán hai ngôi.....	4
§2.	Nửa nhóm và nhóm.....	9
§3.	Nhóm con.....	15
§4.	Nhóm con chuẩn tắc.....	18
§5.	Đồng cấu nhóm.....	22
§6.	Mở rộng một vị nhóm giao hoán thành một nhóm.....	26
	Chương II. Vành – Trường	
§1	Vành.....	30
§2.	Trường.....	36
§3.	Vành đa thức.....	41
	Chương III. Phương trình. Bất phương trình	
§1.	Đẳng thức. Bất đẳng thức.....	53
§2.	Phương trình.....	57
§3.	Hệ phương trình.....	67
§4.	Bất phương trình.....	74
§5.	Hệ bất phương trình.....	80
	Tài liệu tham khảo	85

NHÓM

§1: Phép toán hai ngôi

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

Người học biết:

- Một số tính chất của phép toán hai ngôi
- Một số khái niệm cấu trúc đại số như nửa nhóm, nhóm, nhóm con và một số khái niệm liên quan, kiểm tra được các tập số có cấu trúc đại số nào.
- Một số tính chất đơn giản, các định lý tương đương dùng để kiểm tra các cấu trúc đại số.
- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các cấu trúc của các tập số ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Kiểm tra các tính chất của một phép toán hai ngôi
- Vận dụng linh hoạt kiến thức trong giải bài tập.
- Vận dụng các tính chất của phép toán trong tính nhanh các biểu thức Toán ở Tiểu học. Áp dụng ra bài tập toán cho học sinh.

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung.
- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Định nghĩa phép toán hai ngôi.

1.1. Định nghĩa.

Giả sử X là tập hợp khác rỗng. Ánh xạ $\omega: X \times X \rightarrow X$

$$(a, b) \mapsto a \omega b$$

là một *phép toán hai ngôi* (hay còn gọi tắt là *phép toán*) trên X .

Ảnh $a \omega b$ được gọi là *cái hợp thành* của a và b .

Cái hợp thành của a và b thường được kí hiệu bằng cách viết a và b theo một thứ tự nhất định với một dấu đặc trưng cho phép toán đặt giữa a và b . Ta thường kí hiệu cái hợp thành của a và b là $a.b$ (hoặc ab).

1.2. Ví dụ

1. Phép cộng trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$, kí hiệu bằng dấu $+$ là một phép toán hai ngôi, xác định bởi ánh xạ:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(a, b) \mapsto a + b.$$

2. Phép nhân trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$, kí hiệu bằng dấu $\times$ là một phép toán hai ngôi, xác định bởi ánh xạ:

$$\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(a, b) \mapsto a \times b.$$

3. Phép mũ hóa là một phép toán hai ngôi trên tập các số tự nhiên khác không.

$$T : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$$

$$(a, b) \mapsto a^b$$

4. Phép trừ không là phép toán hai ngôi trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ nhưng là phép toán hai ngôi trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$

5. X là một tập hợp khác rỗng, $\mathcal{R}(X)$ là tập các tập con của X . Phép hợp và phép giao giữa các tập hợp trên $\mathcal{R}(X)$ là các phép toán hai ngôi.

6. Tích ánh xạ là một phép toán hai ngôi trong tập hợp các ánh xạ từ một tập hợp X đến chính nó.

2. Một số tính chất

2.1. Định nghĩa (Tính chất giao hoán, tính chất kết hợp).

Phép toán hai ngôi trên tập X gọi là có tính chất *giao hoán* nếu:

$$ab = ba, \forall a, b \in X.$$

Phép toán hai ngôi trên tập X gọi là có tính chất *kết hợp* nếu:

$$(ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in X.$$

Ví dụ

1. Phép cộng và phép nhân trên các tập hợp số thông thường là các phép toán hai ngôi có tính giao hoán và kết hợp.

2. Phép mũ hóa trên tập $\mathbb{N}^*$ không có tính giao hoán và không có tính kết hợp.

3. Phép hợp và phép giao trên tập hợp $\mathcal{R}(X)$ có tính giao hoán và kết hợp.

2.2. Định nghĩa (Tính chất phân phối). Trên tập X xác định hai phép toán kí hiệu là $(+)$ và $(.)$. Ta nói

+) Phép toán $(.)$ được gọi là có *tính chất phân phối phải* đối với phép toán $(+)$ nếu:

$$(a + b).c = a.c + b.c,$$

+) Phép toán $(.)$ được gọi là có *tính chất phân phối trái* đối với phép toán $(+)$ nếu:

$$c.(a + b) = c.a + c.b.$$

Phép toán $(.)$ được gọi là có *tính chất phân phối* với phép toán $(+)$ nếu vừa phân phối phải vừa phân phối bên với phép $(+)$.

Ví dụ: Trên các tập hợp số, phép nhân có tính phân phối với phép cộng.

- Trên tập hợp $\mathcal{R}(X)$, phép giao phân phối với phép hợp, phép hợp phân phối với phép giao.
- Phép chia các số hữu tỉ khác không phân phối phải đối với phép cộng nhưng không phân phối trái.

3. Các phần tử đặc biệt đối với phép toán hai ngôi

Trên tập X ta trang bị một phép toán hai ngôi kí hiệu $(.)$.

3.1. Định nghĩa (Phần tử trung lập). Phần tử $e_p \in X$ được *phần tử trung lập phải* đối với phép toán $(.)$ trên tập X nếu: $e_p a = a, \forall a \in X$. Phần tử $e_t \in X$ được *phần tử trung lập trái* đối với phép toán $(.)$ trên tập X nếu: $a e_t = a, \forall a \in X$.

Nếu e vừa là trung lập phải vừa là trung lập trái thì e được gọi là *phần tử trung lập*.

Chú ý: Phép nhân: phần tử trung lập thường được gọi là phần tử đơn vị.

Phép cộng: phần tử trung lập thường được gọi là phần tử không.

3.2. Định lí. a. Nếu một phép toán hai ngôi trên tập X một phần tử trung lập trái e_t và một phần tử trung lập phải e_p thì: $e_p = e_t$.

b. Mỗi phép toán có nhiều nhất một phần tử trung lập.

Chứng minh. a. Vì e_t là trung lập trái nên $e_t e_p = e_p$. Vì e_p là trung lập phải nên $e_t e_p = e_t$. Vậy $e_p = e_t$.

b. Giả sử phép toán trên tập X có hai phần tử trung lập là e và e' . Khi đó e và e' vừa là trung lập trái, vừa là trung lập phải. Theo Chứng minh trên ta có: $e = e'$.

Ví dụ. Trên các tập hợp số thông thường, phép cộng có số 0 là phần tử trung lập, phép nhân có số 1 là phần tử đơn vị.

3.3. Định nghĩa (Phần tử đối xứng). Trên tập hợp X , xét phần tử a , phần tử $a' \in X$ được gọi là *phần tử đối xứng phải* của a nếu: $aa' = e$. Phần tử $a' \in X$ được gọi là *phần tử đối xứng trái* của a nếu: $a'a = e$.

Nếu a' vừa là đối xứng phải vừa là đối xứng trái của a thì a' được gọi là *phần tử đối xứng* của a .

Chú ý: Phép nhân: phần tử đối xứng thường được gọi là phần tử nghịch đảo.

Phép cộng: phần tử đối xứng thường được gọi là phần tử đối.

3.4. Định lí. Giả sử phép toán hai ngôi trên X có tính kết hợp và có phần tử trung lập e .

a. Nếu a', a'' lần lượt là phần tử đối xứng phải và đối xứng trái của a thì $a' = a''$.

b. Nếu a có phần tử đối xứng thì phần tử đối xứng đó là duy nhất.

Chứng minh. a. Ta $aa' = e, a''a = e$ nên:

$$a' = ea' = (a''a)a' = a''(aa') = a''e = a''.$$

b. Giả sử a có hai phần tử đối xứng là a' và a'' . Khi đó a', a'' vừa là trung lập phải vừa là trung lập trái. Theo Chứng minh trên ta có $a' = a''$.

Ví dụ:

- Đối với phép cộng trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$, mỗi phần tử a đều có phần tử đối xứng là $-a$.

- Phép nhân trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ chỉ có hai phần tử có nghịch đảo là 1 và -1.
- Với phép nhân trên tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ thì $\frac{1}{q}$ là phần tử nghịch đảo của $q \neq 0$.

3.4. Định nghĩa (Phần tử chính quy): Phần tử $a \in X$ được gọi là *phần tử chính quy bên trái* (*bên phải*) nếu:

$$\forall b, c \in X, \text{ từ } ab = ac \text{ (} ba = ca \text{) ta suy ra } b = c.$$

a được gọi là *chính quy* nếu a vừa là chính quy bên phải vừa là chính quy trái.

Ví dụ: Đối với phép cộng trên $\mathbb{N}$, mọi phần tử đều là chính quy. Vì:

$$a + b = a + c \Rightarrow b = c,$$

$$b + a = c + a \Rightarrow b = c.$$

4. Tập con ổn định với một phép toán

4.1 Định nghĩa: A là một tập con khác rỗng của X . A được gọi là *tập con ổn định* với phép toán $(.)$ trên X nếu:

$$\forall a, b \in A \text{ thì } a.b \in A.$$

Khi đó A còn được gọi là *tập con đóng kín* với phép toán $(.)$ trên X và phép toán $(.)$ trên A được gọi là *phép toán cảm sinh*

4.2. Ví dụ

$A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ là tập các số tự nhiên chẵn. Tập A ổn định với phép cộng và phép nhân trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

$B = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ là tập các số tự nhiên lẻ. Tập B ổn định với phép nhân nhưng không ổn định với phép cộng trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

ỨNG DỤNG TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

1. Một số bài toán trong Sách giáo khoa Tiểu học

Bài 1. (Bài 3.a – Toán 4 trang 48). Tính bằng cách thuận tiện nhất:

$$98 + 3 + 97 + 2$$

$$56 + 399 + 1 + 4$$

Bài 2. (Bài 3.a – Toán 4 trang 75). Tính bằng cách thuận tiện nhất:

$$2 \times 39 \times 5 \quad 302 \times 16 + 302 \times 4$$

Bài 3. (Bài 3 – toán 1 – trang 51). Số ?

$$1 + \dots = 1$$

$$2 + \dots = 2$$

$$\dots + 3 = 3$$

$$0 + \dots = 0$$

Bài 4. (Bài 3 – toán 1 – trang 51). Số ?

$$\dots \times 2 = 2$$

$$5 \times \dots = 5$$

$$\dots \times 1 = 2$$

$$\dots \times 1 = 4$$

Bài 5. (Bài 1 – toán 3 – trang 62). Tính

$$5 - 5 =$$

$$4 - 4 =$$

$$3 - 3 =$$

$$2 - 2 =$$

2. Một số bài toán nâng cao

Bài 1. Không tính hãy xét xem phép tính sau có đúng không?

$$122373 + 234457 = 355469$$

$$35434 + 54568 = 87579$$

Bài 2. Cho các biểu thức

a. $36 \times 5 + 72 \times 2 - 216 + 144$

b. $(79281 \times 25 + 79281 \times 75 + 79281 \times 50) \times (111 \times 9 - 900 - 11 \times 9)$

c. $3145 - 246 + 2347 - 145 + 4246 - 347$

d. $\frac{2}{5} \times \frac{1}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} + \frac{6}{35}$

e. $\frac{6}{17} : \frac{2}{3} + \frac{5}{17} \times \frac{3}{2} + \frac{18}{34}$

- Tính các biểu thức trên bằng cách thuận tiện nhất.
- Hãy chỉ ra trong các bước tính ta sử dụng các tính chất gì, của phép toán nào? Trên tập hợp số nào?

BÀI TẬP

Bài 1. Xét các quy tắc dưới đây có là phép toán trên tập hợp đã cho hay không? Nếu là phép toán thì xét các tính chất: kết hợp, giao hoán, phần tử trung lập, phần tử đối xứng.

a) Trên tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$

$$*(x, y) \mapsto x + 3y + 1,$$

$$*(x, y) \mapsto x^2 + 2xy + y^2,$$

$$*(x, y) \mapsto x.$$

b) Trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$

$$*(x, y) \mapsto \frac{x+y}{2},$$

$$*(x, y) \mapsto x - y + 1.$$

c) Trên tập hợp các số phức $\mathbb{C}$, $\bar{x}, \bar{y}$ là các số phức liên hợp với x, y .

$$*(x, y) \mapsto \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$*(x, y) \mapsto x \cdot \bar{y}.$$

Bài 2. Trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ cho phép toán $\oplus$ xác định bởi công thức

$$a \oplus b = a + b + ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Hãy tìm các phần tử trung lập và các phần tử đối xứng.

Bài 3. Trên tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ cho phép toán $*$ xác định bởi đẳng thức:

$$a * b = \frac{a + b}{2}.$$

Đối với phép toán này $\mathbb{Q}$ có phần tử trung lập hay không ?

Bài 4. Cho các biểu thức

$$a. (1 + 2 + 3 + \dots + 10000) \times (1 : 2 : 3 : \dots : 10000) \times (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 10000) - (1 + 2 + 3 \dots + 10000)$$

$$b. (12 \times 2 + 36 + 12 \times 7 - 144) : (2 + 4 + 6 + \dots + 100)$$

$$c. \frac{19}{4} + \frac{37}{100} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{163}{100} + \frac{3}{8}$$

$$d. \frac{1995}{1996} \times \frac{1990}{1993} \times \frac{1997}{1994} \times \frac{1993}{1995} \times \frac{997}{995}$$

$$e. \left(\frac{121}{122} \times \frac{123}{125} + \frac{127}{129} \right) \times \left(\frac{1995}{1996} \times \frac{17}{16} - \frac{21}{25} : \frac{16}{17} \right) \times \left(\frac{42}{30} \times \frac{75}{23} - \frac{19}{23} \times \frac{210}{38} \right)$$

$$f. \frac{0,18 \times 1230 + 0,9 \times 4567 \times 2 + 3 \times 5310 \times 0,6}{1 + 4 + 6 + 7}$$

$$g. \frac{3 \times 5 \times 40,5 + 0,3 \times 1635 + 26,8 \times 15}{1 + 2 + 3 + 4 + 5}$$

Hãy tính nhanh biểu thức trên và chỉ rõ trong từng bước tính, anh (chị) đã áp dụng tính chất nào của phép tính nhân trên tập các số tự nhiên.

Bài 5. Hãy lấy ví dụ áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng trên tập số tự nhiên trong tính nhanh một biểu thức số ở Toán Tiểu học.

§2: Nửa nhóm. Nhóm

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

- Một số khái niệm cấu trúc đại số như nửa nhóm, nhóm con nhóm con chuẩn tắc, nhóm xyclic, nhóm thương

- Một số tính chất đơn giản, các định lí tương đương dùng để kiểm tra các cấu trúc đại số.

- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các cấu trúc của các tập số ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Kiểm tra một tập hợp cùng với phép toán cho trước có cấu trúc đại số nào

- Vận dụng linh hoạt kiến thức trong giải bài tập.

- Vận dụng các tính chất của phép toán trong tính nhanh các biểu thức Toán ở Tiểu học. Áp dụng ra bài tập toán cho học sinh.

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung .
- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

Cấu trúc nhóm là một cấu trúc đại số đặc biệt đẹp và phong phú; nó là cơ sở cho nhiều lý thuyết hiện đại và có nhiều ứng dụng trong một số lớn lĩnh vực, đặc biệt là vật lý lý thuyết. Chính Ê-va –rit Ga- loa (Evariste Galois) (1812 - 1832), nhà toán học Pháp, năm 1831 đã chỉ ra lợi ích của khái niệm nhóm và đưa vào khái niệm cấu trúc, từ đó mở đường cho những ý tưởng lớn nhất của toán học đương đại.

1. Nửa nhóm

1.1. Định nghĩa

- Tập X cùng với phép toán hai ngôi xác định trên đó được gọi là *nửa nhóm* nếu phép toán có tính chất kết hợp.

- Nửa nhóm X có phần tử trung lập thì X được gọi là *vị nhóm*.

- Nếu phép toán trên nửa nhóm X có tính chất giao hoán thì X được gọi là *nửa nhóm giao hoán*.

1.2. Ví dụ

- Tập $\mathbb{N}$ với phép cộng là vị nhóm giao hoán, phần tử trung lập là 0.

- Tập $\mathbb{N}$ với phép nhân là vị nhóm giao hoán, phần tử đơn vị là 1.

1.3. Hợp thành của nhiều phần tử trong một nhóm

X là nửa nhóm, $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$. Ta kí hiệu:

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \dots a_n, \quad \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Định lý. Trong nửa nhóm, hợp thành của n phần tử theo thứ tự $a_1, a_2, \dots, a_n$ không phụ thuộc vào việc đặt dấu ngoặc.

Chú ý. Trong nửa nhóm X , lũy thừa n (n là một số tự nhiên khác 0) của một phần tử $a \in X$ là tích của n phần tử đều bằng a , kí hiệu là a^n . Từ định lý ta có các quy tắc

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^{n+m} = a^{m+n}, \quad (a^n)^m = a^{nm},$$

Trong trường hợp phép toán của X kí hiệu bằng dấu $+$ thì tổng của n phần tử đều bằng a gọi là *bội n* của a . Từ định lý ta có:

$$na + ma = (n + m)a, \quad n(ma) = nma.$$

2. Nhóm

2.1. Định nghĩa

Một tập $X \neq \emptyset$ cùng với phép toán $(.)$, kí hiệu $(X, .)$ được gọi là *nhóm* nếu thỏa mãn:

- Phép toán $(.)$ có tính chất kết hợp

ii) $(X, \cdot)$ có phần tử trung lập e .

iii) Mọi phần tử của X đều có phần tử đối xứng.

Như vậy : Tập $X \neq \emptyset$ được gọi là *nhóm* nếu:

$$i) \forall a, b, c \in X : a(bc) = (ab)c;$$

$$ii) \exists e \in X \mid \forall a \in X : ea = ae = a;$$

$$iii) \forall a \in X, \exists a' \in X \mid aa' = a'a = e.$$

Nếu phép toán có tính giao hoán thì nhóm X gọi là nhóm giao hoán (nhóm aben).

Nếu tập hợp X là hữu hạn thì nhóm X gọi là *nhóm hữu hạn*, số phần tử của X gọi là *cấp* của nhóm. Nếu tập hợp X là vô hạn thì nhóm X gọi là *nhóm vô hạn*, cấp của X vô hạn.

2.2. Ví dụ

1. $\mathbb{Z}$ cùng với phép cộng lập thành một nhóm, kí hiệu $(\mathbb{Z}, +)$

- Phép cộng trên $\mathbb{Z}$ có tính kết hợp.

- Phần tử trung lập là 0.

- Mỗi $n \in \mathbb{Z}$ có phần tử đối là $-n$.

Nhóm $(\mathbb{Z}, +)$ là nhóm aben.

2. Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ với phép nhân không phải là nhóm.

3. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép cộng không là nhóm. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ với phép nhân không là nhóm.

4. Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là nhóm aben với phép cộng nhưng không là nhóm với phép nhân. Tập hợp các số hữu tỉ khác không $\mathbb{Q}^*$ là nhóm aben với phép nhân nhưng không là nhóm với phép cộng.

5. Cho $X = \{1, -1, i, -i\}, i^2 = -1$.

.	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

Khi đó: Phép nhân có tính kết hợp, X có đơn vị là 1, mỗi phần tử đều có nghịch đảo. Phép nhân có tính giao hoán. Vậy X là nhóm aben.

3. Một số tính chất của nhóm

3.1. Mệnh đề. Giả sử X là một nhóm, khi đó:

i. Phần tử trung lập là duy nhất,

ii. Mỗi $x \in X$ có duy nhất một phần tử đối xứng,

$$iii. \forall a, b \in X, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1},$$

iv. Mọi phần tử đều là chính quy.

Chứng minh.

i. Hiển nhiên theo định lý 3.2 §1.

ii. Hiển nhiên theo định lý 3.4 §1.

iii. Ta có

$$\begin{aligned}(b^{-1}a^{-1})(ab) &= b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e, \\ (ab)(b^{-1}a^{-1}) &= a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e.\end{aligned}$$

iv. Với $\forall a \in X$, ta có nếu $ab = ac$ thì

$$b = eb = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) = (a^{-1}a)c = ec = c, \quad \forall b, c \in X.$$

Tương tự nếu $ba = ca$ thì $b = c$.

Chú ý

1. Nếu e là phần tử đơn vị của nhóm X , ta kí hiệu: $a^0 = e, a^{-n} = (a^n)^{-1}$ với $a \in X, n \in \mathbb{N}$ thì với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ ta có :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

2. Nếu X là một nhóm với phép cộng thì:

- Phần tử 0 là duy nhất.
- Với mỗi phần tử a thuộc X , phần tử đối $-a$ là duy nhất.
- Ta có $-(a + b) = -b - a$.
- Nếu $a + b = a + c$ hoặc $b + a = c + a$ thì $b = c$.
- $0a = 0, (-n)a = -na$, với $n \in \mathbb{Z}$
 $ma + na = (m + n)a$, với $m, n \in \mathbb{Z}$
 $n(ma) = nma$.

3.2. Định lí. Cho X là một nửa nhóm. Các mệnh đề sau đây là tương đương:

- X là một nhóm.
- X có trung lập trái và mỗi phần tử thuộc X đều có đối xứng trái.
- X có trung lập phải và mỗi phần tử thuộc X đều có đối xứng phải.

Chứng minh

i $\Rightarrow$ ii : Hiển nhiên

ii $\Rightarrow$ i : Giả sử e là phần tử trung lập trái và a là một phần tử của X . Theo ii ta có a có đối xứng trái là a' và a' có đối xứng trái là a'' . Khi đó ta có $ea = e, a'a = e, a''a' = e$ nên

$$aa' = e(aa') = (a'a')(aa') = a''(a'a)a' = a''(ea') = a''a' = e.$$

Từ đó ta suy ra $ae = a(a'a) = (aa')a = ea = a$ hay e là trung lập và a' cũng là đối xứng phải của a . Vậy X là một nhóm.

Tương tự ta chứng minh được ii $\Rightarrow$ i.

3.3. Định lí. Cho X là nửa nhóm khác rỗng. X là nhóm khi và chỉ khi các phương trình $ax = b$, $ya = b$ có nghiệm với $\forall a, b \in X$.

Chứng minh: " $\Rightarrow$ " : Khi X là nhóm, ta có $x = a^{-1}b$ và $y = ba^{-1}$ lần lượt là nghiệm của phương trình $ax = b, ya = b$.

Vì $a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b$, $(ba^{-1})a = b(aa^{-1}) = be = b$.

" $\Leftarrow$ ". Giả sử phương trình $ax = b$ và $ya = b$ có nghiệm với mọi a, b thuộc X . Khi đó vì $X \neq \emptyset$ nên với $a \in X$ phương trình $ax = a$ có nghiệm $x = e$. Với mỗi $b \in X$ các phương trình $ya = b, ay = b$ có nghiệm.

Xét $be = (ya)e = y(ae) = ya = b \Rightarrow be = b$. Vậy e là đơn vị phải của X

Với mỗi $a \in X$ phương trình $ax = e$ có nghiệm. Do đó tồn tại phần tử $c \in X$ sao cho $ac = e$; nghĩa là a có nghịch đảo phải là c . Theo định lý 3.2, ta có X là một nhóm.

ỨNG DỤNG TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Tìm hiểu một số bài toán sau

Bài 1.(Bài 4 – toán 3- trang 106) Tìm x

$$\text{a. } x + 1909 = 2050 \qquad \text{b. } x - 586 = 3705 \text{ c. } 8462 - x = 762$$

Bài 2. Tìm x

$$(x+9)+(x-2)+(x+7)+(x-4)+(x+5)+(x-6)+(x+3)+(x-8)+(x+1)=95$$

Bài 3. Cho một số phương trình

$$x + 6 = 10 \qquad x + 15 = 7$$

$$6 + x = 12 \qquad x - 3 = 7.$$

a. Giải phương trình trên với x là một số tự nhiên.

b. Vì sao phương trình $x + 15 = 7$ là vô nghiệm trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}^*$? Hãy đưa ra điều kiện để phương trình $a + x = b$ có nghiệm trên tập $\mathbb{N}^*$. Liên hệ với việc dạy học các phương trình đơn giản trong dạy học môn Toán ở Tiểu học hiện nay. Từ đó đưa ra cơ sở của việc dạy học các phương trình đơn giản trong dạy học môn Toán ở trường Tiểu học hiện nay.

Hướng dẫn. Phương trình $x + 15 = 7$ vô nghiệm vì $7 - 15$ là phép tính không thực hiện trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$.

Điều kiện để phương trình $a + x = b$ có nghiệm là $b - a \in \mathbb{N}$ hay $b \geq a$, với $a, b \in \mathbb{N}$

Việc dạy học giải các phương trình đơn giản trong môn Toán ở nhà trường Tiểu học hiện nay là dựa vào việc tìm thành phần chưa biết của phép toán.

Bài 4. Thay các chữ a, b, c bởi các chữ số thích hợp trong các phép tính sau:

$$\overline{abc}3 - \overline{abc} = 966.$$

BÀI TẬP

Bài 1.a. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ cùng với phép cộng có cấu trúc gì? Trong tập $\mathbb{N}$ phương trình nào dưới đây có nghiệm?

$$x + 5 = 7$$

$$x + 7 = 5$$

Khi nào thì phương trình $x + a = b$ với $a, b \in \mathbb{N}$ có nghiệm trong $\mathbb{N}$? Chứng minh nếu $x + a = b$ không có nghiệm trong $\mathbb{N}$ thì $x + b = a$ có nghiệm trong $\mathbb{N}$.

b. Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ cùng với phép cộng có cấu trúc đại số gì? Chứng minh phương trình $x + a = b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ luôn luôn có nghiệm trong $\mathbb{Z}$.

c. Tập hợp $\mathbb{N}$ có phải là bộ phận ổn định đối với phép cộng trong $\mathbb{Z}$. không? Chứng minh trong $\mathbb{N}$, ta thực hiện được luật giản ước đối với phép cộng. Liên hệ với việc dạy học phép cộng trên tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ ở Tiểu học.

Bài 2.a. Tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số tự nhiên khác 0 cùng với phép nhân có cấu trúc gì? Trong $\mathbb{N}^*$, phương trình nào dưới đây có nghiệm?

$$2x = 6$$

$$2x = 3$$

$$3x = 2$$

Đúng hay sai câu nói: “Nếu $ax = b$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ không có nghiệm trong $\mathbb{N}^*$ thì $bx = a$ có nghiệm trong $\mathbb{N}^*$ ”?

b. Tập hợp các số hữu tỉ dương $\mathbb{Q}_+^*$ cùng với phép nhân luôn có cấu trúc gì? Chứng minh phương trình $ax = b$ với $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ luôn có nghiệm trong $\mathbb{Q}_+^*$.

c. Tập $\mathbb{N}^*$ có phải là một bộ phận ổn định đối với phép nhân trong $\mathbb{Q}_+$ không? Chứng minh trong $\mathbb{N}^*$ ta thực hiện được luật giản ước đối với phép nhân. Ta có thể làm được như vậy đối với tập $\mathbb{N}$ không?

Bài 3. Những tập hợp nào sau đây cùng với phép toán tương ứng lập thành một nhóm?

a. Tập hợp các số hữu tỉ có dạng a^m , với $a, m \in \mathbb{Z}$ với phép nhân.

b. Tập hợp các dãy n số gồm số 0 và 1 với phép toán $\oplus$

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n), \quad \alpha \oplus \beta = (a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n)$$

Với $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, $a_i \oplus b_i = a_i + b_i \pmod{2}$.

c. Tập hợp các đa thức hệ số thực với phép cộng đa thức.

Bài 4. Các tập hợp sau đây với phép toán đã cho lập thành một nhóm hay không?

a. $M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ với phép *

$$(a, b), (c, d) \in M : (a, b) * (c, d) = (ac, ad + b),$$

b. $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ với phép cộng,

c. với n là một số nguyên dương, xét tập các đa thức có bậc k ($0 \leq k \leq n$).

d. Xét tập các tập con $P(X)$ với $X \neq \emptyset$ với phép hiệu đối xứng :

$$\Delta: X_1 \Delta X_2 = (X_1 \setminus X_2) \cup (X_2 \setminus X_1), \quad X_1, X_2 \in P(X)$$

Bài 5. Chứng minh rằng nếu với đơn vị e và với mọi $a \in G$ ta có $a^2 = e$ thì G là nhóm aben

Bài 6. Cho X là một nhóm aben. Chứng minh rằng $(ab)^n = a^n b^n$ với mọi $a, b \in X$ và mọi số tự nhiên $n > 0$.

§3: Nhóm con

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

Người học biết:

- Khái niệm đồng cấu nhóm, ảnh và hạt nhân, các định lý về đồng cấu nhóm.
- Hiểu việc xây dựng các phép toán ở Tiểu học trên cơ sở đồng cấu.
- Kiến thức về mở rộng tập hợp số
- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các cấu trúc của các tập số ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Xây dựng và chứng minh các đồng cấu nhóm, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.
- Vận dụng linh hoạt kiến thức trong giải bài tập.
- Xây dựng phép toán tương ứng trên các tập hợp số trong chương trình Tiểu học

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung.
- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Định nghĩa và ví dụ.

1.1. Định nghĩa. Cho X là một nhóm, $\emptyset \neq A \subset X$. Tập A được gọi là *nhóm con* của X nếu A cùng với phép toán trên X cũng là một nhóm. Cụ thể, A là *nhóm con* nếu:

- A ổn định với phép toán trong X .
- A có phần tử trung lập.
- Mỗi phần tử của A đều có phần tử đối xứng trong A .

1.2. Ví dụ

1. Nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$ là nhóm con của nhóm cộng các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, nhóm cộng các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là nhóm con của nhóm cộng các số thực $\mathbb{R}$.

2. Với nhóm $(\mathbb{Z}, +)$, $A = \{2m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ là nhóm con của nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$. Ký hiệu A là $2\mathbb{Z}$.

3. $\{1, -1\}$ là nhóm con của nhóm nhân $X = \{1, -1, i, -i\}, i^2 = -1$.

4. Nếu X là nhóm thì X luôn có hai nhóm con đó là $\{e\}$ và X . Ta gọi đó là hai nhóm con tầm thường của X .

2. Định lý (tiêu chuẩn nhận biết nhóm con)

Giả sử X là nhóm, $\emptyset \neq A \subset X$. Các mệnh đề sau là tương đương.

i. A là nhóm con của X .

ii. $\forall x, y \in A$ thì $xy \in A, x^{-1} \in A$.

iii. $\forall x, y \in A$ thì $xy^{-1} \in A$.

Chứng minh.

i $\Rightarrow$ ii. Hiển nhiên.

ii $\Rightarrow$ iii. Với $y \in A$, theo b) thì $y^{-1} \in A$. Lại theo b) thì $xy^{-1} \in A$.

iii $\Rightarrow$ i: Vì $A \neq \emptyset$ nên $\exists a \in A$, theo c) ta có $e = aa^{-1} \in A$ (điều kiện ii)

Với $x \in A$ ta có $x^{-1} = ex^{-1} \in A$ (điều kiện iii)

Với $\forall x, y \in A$, ta có $y^{-1} \in A$ nên $x(y^{-1})^{-1} = xy \in A$. (điều kiện i)

Vậy A là nhóm con của X .

Ví dụ 1. Nhóm $(\mathbb{Z}, +)$ là nhóm con của nhóm $(\mathbb{Q}, +)$.

Ví dụ 2. $m\mathbb{Z} = \{ma \mid a \in \mathbb{Z}\}$ là nhóm con của $(\mathbb{Z}, +)$. Ta có $m\mathbb{Z} \neq \emptyset$ do $0 = m \cdot 0 \in m\mathbb{Z}$ và $m\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

Cách 1: $\forall ma, mb \in m\mathbb{Z}$ ta có $ma + mb = m(a + b) \in m\mathbb{Z}, -(ma) = -ma \in m\mathbb{Z}$.

Cách 2: $\forall ma, mb \in m\mathbb{Z}$ ta có $ma - mb = m(a - b) \in m\mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. X là nhóm nhân và a là một phần tử của X . Khi đó $A = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ là nhóm con của X . Thật vậy, ta có $1 = a^0 \in A$ nên $A \neq \emptyset$.

$\forall x, y \in A$, ta có $x = a^n$ và $y = a^m$. Xét $xy^{-1} = a^n (a^m)^{-1} = a^n a^{-m} = a^{n-m} \in A$.

3. Nhóm xyclic

3.1. Định nghĩa. Nhóm con A của nhóm X được gọi là *nhóm xyclic* nếu tồn tại $a \in A$ sao cho $A = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Phần tử a gọi là *phần tử sinh* của A . Ta nói A là nhóm xyclic sinh bởi a , ký hiệu $A = \langle a \rangle$.

Chú ý:

- Nếu phép toán trong A ký hiệu là phép cộng thì $A = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

- Nếu A là nhóm con cyclic sinh bởi a của X thì A giao của tất cả các nhóm con B của X , trong đó B chứa a .

3.2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$, xét

$$\langle 1 \rangle = \{n \cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

$$\langle -1 \rangle = \{n \cdot (-1) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{-n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

Vậy $(\mathbb{Z}, +)$ là nhóm cyclic sinh bởi 1, hoặc -1.

Ta cũng có $m\mathbb{Z} = \langle m \rangle$, đặc biệt tập các số nguyên chẵn là nhóm cyclic sinh bởi phần tử 2.

Ví dụ 2: Trong nhóm cyclic $A = \langle a \rangle$, ta có $a^n \cdot a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m \cdot a^n$. Do đó nhóm cyclic là nhóm aben.

3.3. Cấp của một phần tử

Cho X là nhóm cyclic sinh bởi phần tử a : $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Xét hai trường hợp

Trường hợp 1. $\forall m \neq n \in \mathbb{Z} : a^n \neq a^m$. Khi đó tất cả các lũy thừa của a đều khác nhau: $\dots, a^{-n}, a^{-n+1}, \dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots$, số phần tử của $X = \langle a \rangle$ là vô hạn. Ta nói cấp của X là vô hạn và a là phần tử có cấp vô hạn.

Trường hợp 2. $\exists m \neq n \in \mathbb{Z} : a^m = a^n$. Giả sử $m > n$ ta có: $a^m a^{-n} = a^{m-n} = e, m-n \in \mathbb{Z}$.

Giả sử k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $a^k = e$. Khi đó $a^0, a^1, \dots, a^{k-2}, a^{k-1}$ đều khác nhau. Vì với mọi $s \in \mathbb{Z}$, s có thể biểu diễn $s = k \cdot p + r$ với $0 \leq r < k$, nên $a^s = a^{k \cdot p + r} = a^{k \cdot p} \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r$. Vậy a^s phải trùng với các phần tử $a^0, a^1, \dots, a^{k-2}, a^{k-1}$.

Trong trường hợp này nhóm X chỉ chứa k phần tử, cấp của nhóm X là k . Ta nói rằng phần tử a có cấp là k .

3.4. Nhóm con của một nhóm cyclic.

Định lí. Mọi nhóm con của một nhóm cyclic là nhóm cyclic.

BÀI TẬP

Bài 1. Tập hợp các số thực dạng $a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a^2 + b^2 \neq 0$ với phép nhân có lập thành nhóm con của nhóm nhân các số thực khác 0 hay không? Tìm những ví dụ về nhóm con của nhóm cộng $\mathbb{Z}$.

Bài 2. Cho G là một nhóm. Tâm G là tập hợp $M = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}$. Chứng minh M là nhóm con giao hoán của G .

Bài 3. Ký hiệu $\mathbb{Z}_k$ là nhóm thặng dư mod k .

- Tìm các nhóm con cyclic của nhóm cộng $\mathbb{Z}_{24}$ sinh bởi các phần tử 3 ? 5 ?
- Tìm các nhóm con cyclic của nhóm cộng $\mathbb{Z}_{13}$ sinh bởi các phần tử 3 ? 5 ?
- Các nhóm cộng $\mathbb{Z}_{24}, \mathbb{Z}_{13}$ có là nhóm cyclic không.

Bài 4. Cho G là nhóm nhân có đơn vị e và a là phần tử cấp n . Chứng minh rằng $a^m = e \Leftrightarrow m : n$.

Bài 5. Cho X, Y là các nhóm con xyclic có cấp tương ứng là m và n . Chứng minh rằng $X \times Y$ là nhóm xyclic khi và chỉ khi $(m, n) = 1$.

§4: Nhóm con chuẩn tắc

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

Giúp người học nắm vững

- Cấu trúc đại số vành, trường và một số khái niệm liên quan : vành con, trường con, ideal, miền nguyên, vành và trường sắp thứ tự.

- Một số tính chất đơn giản, các định lý tương đương dùng để kiểm tra các cấu trúc đại số.

- Khái niệm đồng cấu vành, ảnh và hạt nhân.

- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các cấu trúc của các tập số ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Chứng minh các tập hợp có cấu trúc đại số nào, xác định các phần tử đặc biệt.

- Xây dựng và chứng minh các đồng cấu vành, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.

- Kiểm tra vành, trường có là vành hay trường sắp thứ tự không.

- Vận dụng linh hoạt kiến thức trong giải bài tập.

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung .

- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Sự chia lớp của một nhóm theo một nhóm con

1.1. Quan hệ tương đương xác định bởi một nhóm con.

X là một nhóm, H là nhóm con của X . Với mỗi $x \in X$, ta kí hiệu:

$$xH = \{xh \mid h \in H\}, \quad Hx = \{hx \mid h \in H\}.$$

Mệnh đề. H là nhóm con của nhóm X . Quan hệ $\sim$ trên X xác định bởi:

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in yH \Leftrightarrow y^{-1}x \in H$$

là quan hệ tương đương trên X và lớp tương đương $\bar{x} = xH$.

Chứng minh. Rõ ràng $x \sim x$ vì $x = xe \in xH$ (e là phần tử trung lập của X). Nếu $x \sim y$ thì $x \in xH$, nghĩa là tồn tại $h \in H : x = yh$. Suy ra $y = xh^{-1} \in xH$, nghĩa là $y \sim x$.

Nếu $x \sim y$ và $y \sim z$ thì $x \in yH$ và $y \in zH$ hay $x = yh$ và $y = zh'$ với $h, h' \in H$. Từ đó ta có $x = zh'h \in zH$, nghĩa là $x \sim z$. Quan hệ $\sim$ có tính chất phản xạ, đối xứng, bắc cầu và vì thế $\sim$ là một quan hệ tương đương.

Định nghĩa. Mỗi lớp tương đương theo quan hệ trên được gọi là một *lớp kề trái* của nhóm con H . Tập hợp các lớp kề trái kí hiệu là X/H .

Tương tự, nếu quan hệ $\sim$ được xác định bởi: $x \sim y \Leftrightarrow x \in Hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ thì mỗi lớp tương đương được gọi là một *lớp kề phải* của H .

1.2. Định lí Lagrange. *Cấp của một nhóm con của nhóm hữu hạn X là ước của cấp của X .*

Chứng minh. Giả sử X có cấp n , H là một nhóm con cấp m của X , chẳng hạn $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. Khi đó lớp kề trái $xH = \{xh_1, xh_2, \dots, xh_m\}$ gồm m phần tử khác nhau vì nếu có $xh_i = xh_j$ với $i \neq j$ thì $h_i = h_j$, mâu thuẫn với giả thiết $h_i \neq h_j$ khi $i \neq j$. Gọi số lớp là q .

Vì các lớp khác nhau không giao nhau nên: $X = \bigcup_{i=1}^q x_iH, x_iH \cap x_jH = \emptyset$ với $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, q$.

Do đó số phần tử của X bằng tổng các số phần tử của các lớp khác nhau, nghĩa là $n = mq$.

Theo chứng minh định lí trên thì số các lớp kề trái của nhóm con H trong nhóm hữu hạn X bằng số lớp kề phải của H . Số các lớp kề trái (phải) của nhóm con H được gọi là *chỉ số* của H trong X .

Hệ quả 1. *Cấp của một phần tử thuộc một nhóm hữu hạn là ước của cấp của nhóm đó.*

Hệ quả 2. *Mỗi nhóm có cấp là số nguyên tố đều là nhóm cyclic và được sinh bởi một phần tử bất kì, khác phần tử trung lập của nhóm.*

2. Nhóm con chuẩn tắc

2.1. Định nghĩa. Nhóm con H của X được gọi là *nhóm con chuẩn tắc* của X nếu $xH = Hx$, $\forall x \in X$. Kí hiệu $H \triangleleft X$.

2.2. Định lí. *Giả sử H là một nhóm con của nhóm X . Khi đó H là nhóm con chuẩn tắc của nhóm X khi và chỉ khi*

$$xhx^{-1} \in H, \forall h \in H, \forall x \in X.$$

Chứng minh. " $\Rightarrow$ " Giả sử $H \triangleleft X$, $h \in H, x \in X$.

Ta có $xH = Hx$ nên $xh \in Hx$. Vì thế tồn tại $h' \in H$ sao cho $xh = h'x$. Suy ra $xhx^{-1} = h' \in H$.

" $\Leftarrow$ " Ta chứng minh $xH \subset Hx$. Với $y \in xH$ thì $\exists h' \in H$ sao cho $y = xh'$.

Suy ra $y = xh'(x^{-1}x) = (xh'x^{-1})x$. Mà $xh'x^{-1} \in H$ nên $y \in Hx$. Như vậy $xH \subset Hx$.

Tương tự $xH \supset Hx$. Vậy $xH = Hx$, tức là $H \triangleleft X$.

3. Nhóm thương

3.1. Mệnh đề và định nghĩa. Cho X là một nhóm, H là nhóm con của nhóm X . Khi đó

i) Quy tắc cho tương ứng cặp (xH, yH) với xyH là phép toán hai ngôi trên X/H .

ii) X/H cùng với phép toán hai ngôi $(xH, yH) \rightarrow xyH$ là một nhóm, gọi là nhóm thương của X trên H .

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh quy tắc tương ứng trên là một phép toán hai ngôi trên X/H , nghĩa là ta có ánh xạ $\varphi: (X/H) \times (X/H) \rightarrow X/H$.

Thật vậy, giả sử $x'H = xH$ và $y'H = yH$ thì $x' = xh_1, y' = yh_2$. Do đó $x'y' = xh_1yh_2$. Vì $H \triangleleft X$ nên $y^{-1}h_1y = h' \in H$. Suy ra: $x'y' = xy(y^{-1}h_1y)h_2 = xyh'h_2 \in xyH$; nghĩa là $x'y'H = xyH$.

Vậy $\varphi(xH, yH) = xyH$ được xác định là duy nhất.

Lại có, phép toán có tính chất kết hợp:

$$(xH \cdot yH) \cdot zH = xyH \cdot zH = (xy)zH = x(yz)H = xH(yzH) = xH(yHzH).$$

Với e là phần tử trung lập của X thì lớp eH là phần tử trung lập của X/H vì:

$$eH \cdot xH = exH = xH = xH \cdot eH.$$

Phần tử nghịch đảo của xH là $x^{-1}H$ vì: $xH \cdot x^{-1}H = xx^{-1}H = eH = x^{-1}xH = x^{-1}HxH$.

Vậy X/H là một nhóm.

3.2. Ví dụ

1. X là nhóm, hai nhóm con tầm thường $\{e\}$ và X đều là nhóm con chuẩn tắc của X .

Nhóm thương

$$X/\{e\} = X, \quad X/X = \{e\}.$$

2. Mọi nhóm con của nhóm aben đều là nhóm con chuẩn tắc.
3. Xét $(\mathbb{Z}, +)$, các nhóm con $k\mathbb{Z}$ đều là nhóm con chuẩn tắc. Tập hợp thương

$$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{k\mathbb{Z}, 1+k\mathbb{Z}, \dots, (k-1)+k\mathbb{Z}\}$$

cùng với phép toán

$$(x+k\mathbb{Z}) + (y+k\mathbb{Z}) = (x+y) + k\mathbb{Z}$$

lập thành nhóm thương, kí hiệu $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_k$, $m+k\mathbb{Z} = \overline{m}$. Ta có $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{k-1}\}$.

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng nếu H, K là nhóm con chuẩn tắc của G thì $H \cap K$ là nhóm con chuẩn tắc của G .

Bài 2. Tìm các nhóm thương của các nhóm sau

- a) $3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, ($k\mathbb{Z}$ là các số nguyên bội k).
- b) $4\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$,
- c) Nhóm nhân các số thực khác không trên nhóm con các số thực dương.

§5: Đồng cấu nhóm

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

Người học biết:

- Khái niệm đồng cấu nhóm, ảnh và hạt nhân, các định lý về đồng cấu nhóm.
- Hiểu việc xây dựng các phép toán ở Tiểu học trên cơ sở đồng cấu.
- Kiến thức về mở rộng tập hợp số
- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các cấu trúc của các tập số ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Xây dựng và chứng minh các đồng cấu nhóm, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.
- Vận dụng linh hoạt kiến thức trong giải bài tập.
- Xây dựng phép toán tương ứng trên các tập hợp số trong chương trình Tiểu học

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung.
- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Định nghĩa và ví dụ

Xét nhóm $(\mathbb{Z}, +)$, ánh xạ $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(z) = 2z$ với n là một số tự nhiên cho trước.

Khi đó ta có

$$f(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = f(a) + f(b).$$

Ánh xạ thỏa mãn tính chất trên gọi là đồng cấu nhóm

1.1. Định nghĩa. Cho hai nhóm X, Y . Ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ gọi là đồng cấu nhóm nếu

$$\forall a, b \in X: f(ab) = f(a).f(b).$$

Nếu $X = Y$ thì f gọi là tự đồng cấu.

Đồng cấu f được gọi là đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu nếu ánh xạ f tương ứng là đơn ánh, toàn ánh, song ánh. Khi f là đẳng cấu ta kí hiệu $f: X \xrightarrow{\sim} Y$.

1.2. Ví dụ

1. Ánh xạ đồng nhất là tự đẳng cấu.

2. A là nhóm con của nhóm X . Khi đó ánh xạ $f: A \rightarrow X$, $a \mapsto a$

là đơn cấu, gọi là đơn cấu chính tắc hay phép nhúng chính tắc.

3. $A \triangleleft X$. Khi đó ánh xạ $p: X \rightarrow X/A$, $x \mapsto xA = \bar{x}$

là toàn cấu, gọi là toàn cấu chính tắc hay phép chiếu chính tắc.

4. Ánh xạ $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(z) = nz$ là một đơn cấu nhưng không là toàn cấu với $n \neq 1$.

5. Xét ánh xạ $f: (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$, $x \mapsto \log x$.

f là đồng cấu hơn nữa còn là đẳng cấu ($\mathbb{R}_+^*$ là tập hợp các số thực dương).

2. Ảnh và hạt nhân của đồng cấu nhóm

2.1. Định nghĩa. Giả sử $f : X \mapsto Y$ là đồng cấu nhóm. Ta kí hiệu:

$\text{Im } f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ là ảnh và $\text{Ker } f = \{x \in X \mid f(x) = e_Y\} = f^{-1}(e_Y)$ là hạt nhân của đồng cấu f .

2.2. Ví dụ

Đồng cấu $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(z) = 2z$

$$\text{Im } f = f(\mathbb{Z}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}.$$

$$\text{Ker } f = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 0\} = \{0\}.$$

3. Một số định lý

3.1. Định lý (Tích của hai đồng cấu). Cho $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ là các đồng cấu nhóm. Khi đó ánh xạ tích $h = g \circ f$ là đồng cấu đi từ X tới Z .

Thật vậy,

$$\forall a, b \in X : h(ab) = g \circ f(ab) = g(f(ab)) = g(f(a) \cdot f(b)) = g(f(a)) \cdot g(f(b)) = h(a) \cdot h(b).$$

3.2. Định lý. Cho đồng cấu $f : X \mapsto Y$. Khi đó:

$$\text{i) } f(e_X) = e_Y.$$

$$\text{ii) } \forall x \in X, f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}.$$

Chứng minh.

$$\text{i) Với mọi } x \in X \text{ ta có: } f(x) = f(e_X x) = f(e_X) f(x)$$

Theo luật giản ước ta suy ra $f(e_X) = e_Y$.

$$\text{ii) Với mọi } x \in X \text{ ta có: } e_Y = f(e_X) = f(xx^{-1}) = f(x) f(x^{-1})$$

Theo luật giản ước ta có: $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Hệ quả 1. Nếu f là đồng cấu thì

$$\text{i) } f \text{ là đơn ánh khi và chỉ khi } \text{Ker } f = \{e_X\}$$

$$\text{ii) } f \text{ là toàn ánh khi và chỉ khi } \text{Im } f = Y.$$

3.3. Định lý. Cho $f : X \mapsto Y$ là đồng cấu nhóm. H là nhóm con của X , K là nhóm con chuẩn tắc của Y . Khi đó

$$\text{i) } f(H) \text{ là nhóm con của } Y.$$

$$\text{ii) } f^{-1}(K) \text{ là nhóm con chuẩn tắc của } X.$$

Chứng minh. i) Do $e_X \in H$ nên $f(e_X) = e_Y \in f(H)$. Vậy $f(H) \neq \emptyset$.

Với mọi $x, y \in f(H)$ thì tồn tại $a, b \in H$ sao cho $f(a) = x$, $f(b) = y$. Khi đó:

$$xy^{-1} = f(a)(f(b))^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}).$$

Do H là nhóm con của X nên với $a, b \in H$ thì $ab^{-1} \in H$ nên $xy^{-1} = f(ab^{-1}) \in f(H)$.

ii) Do K là nhóm con của Y nên $e_Y \in K$. Khi đó $e_X \in f^{-1}(e_Y) \subset f^{-1}(K)$.

Vậy $f^{-1}(K) \neq \emptyset$.

+) Với $a, b \in f^{-1}(K)$ thì $f(a), f(b) \in K$.

Ta có : $f(ab^{-1}) = f(a)(f(b))^{-1} \in K$ nên $ab^{-1} \in f^{-1}(K)$. Vậy $f^{-1}(K)$ là nhóm con của X .

+) Với $\forall a \in f^{-1}(K), x \in X$ ta có :

$$f(xax^{-1}) = f(x)f(a)(f(x))^{-1} \in K \text{ (Do } K \text{ là nhóm con chuẩn tắc của } Y \text{ và } f(a) \in K).$$

Vậy $f^{-1}(K)$ là nhóm con chuẩn tắc của X .

Hệ quả 2. Nếu $f : X \mapsto Y$ là đồng cấu nhóm thì

i. $\text{Im } f$ là nhóm con của Y ,

ii. $\text{Ker } f$ là nhóm con chuẩn tắc của X .

3.4. Định lý đồng cấu nhóm

Cho $f : X \mapsto Y$ là đồng cấu nhóm và $p : X \rightarrow X/\text{Ker } f$ là toàn cấu chính tắc. Khi đó:

i. Tồn tại duy nhất đồng cấu nhóm $\bar{f} : X/\text{Ker } f \rightarrow Y$ sao cho $f = \bar{f} \circ p$

(hay còn gọi là biểu đồ sau giao hoán)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \searrow & & \nearrow \bar{f} \\ & X/\text{Ker } f & \end{array}$$

ii. Đồng cấu $\bar{f}$ là đơn cấu và $\text{Im } \bar{f} = f(X)$.

Chứng minh. Đặt $\text{Ker } f = H$.

i. Xây dựng ánh xạ $\bar{f}$ như sau:

$$\begin{aligned} \bar{f} : X/H &\rightarrow Y \\ aH &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Ta có $\bar{f}$ là ánh xạ. Thật vậy, nếu $x_1H = x_2H$ thì $x_1^{-1}x_2 \in H$. Do $H = \text{Ker } f$ nên

$$f(x_1^{-1}x_2) = e_Y \Rightarrow (f(x_1))^{-1}f(x_2) = e_Y \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

$\forall x_1H, x_2H \in X/H$ ta có:

$$f(x_1H.x_2H) = f(x_1x_2H) = f(x_1x_2) = f(x_1).f(x_2) = f(x_1H).f(x_2H).$$

Vậy $\bar{f}$ là đồng cấu nhóm.

Mặt khác $\forall x \in X$ ta có: $f(x) = \bar{f}(xH) = \bar{f}(p(x)) = \bar{f} \circ p(x)$. Vậy $f = \bar{f} \circ p$.

Giả sử có ánh xạ $g: X/H \rightarrow Y$ thỏa mãn $f = g \circ p$. Khi đó: $\forall xH \in X/H$

$g(xH) = g(p(x)) = f(x) = \bar{f}(xH)$. Suy ra $g = \bar{f}$. Vậy đồng cấu $\bar{f}$ là duy nhất.

ii. Ta có :

$$\text{Ker } \bar{f} = \{xH \mid \bar{f}(xH) = e_Y\} = \{xH \mid f(x) = e_Y\} = \{xH \mid x \in H = eH\} = \{eH\}$$

Vậy $\bar{f}$ là một đơn cấu.

Ta cũng có : $f(X) = \bar{f} \circ p(X) = \bar{f}(X/H)$. Vậy $\text{Im } \bar{f} = f(X)$.

Hệ quả 3. i) Nếu $f: X \mapsto Y$ là đồng cấu nhóm thì $f(X) \simeq X/\text{Ker } f$.

ii) Nếu $f: X \mapsto Y$ là toàn cấu thì $Y \simeq X/\text{Ker } f$.

Chứng minh. i. Từ định lí ta thấy tồn tại đơn cấu

$$\bar{f}: X/\text{Ker } f \rightarrow f(X)$$

Thỏa mãn $\text{Im } \bar{f} = f(X)$. Vậy $\bar{f}$ là đẳng cấu hay $f(X) \simeq X/\text{Ker } f$.

ii. Khi f là toàn cấu thì $f(X) = Y$. Áp dụng câu i. suy ra điều phải chứng minh.

ỨNG DỤNG TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Trong bài phép cộng trong phạm vi 3 ta thấy mối liên hệ tương ứng giữa phép gộp và phép cộng. Ví dụ: Có hai con gà, thêm một con gà là 3 con gà.

Tương ứng: $2 + 1 = 3$.

Ta thấy tương ứng từ tập hợp các con gà đến tập các số tự nhiên. Tương ứng phép gộp các con gà với phép cộng các số tự nhiên. Trong chương trình sách giáo khoa Tiểu học có rất nhiều các tương ứng như vậy.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực, trong các ánh xạ từ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ đến chính nó được xác định dưới đây, ánh xạ nào là tự đồng cấu của $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a. $x \mapsto x^3$

b. $x \mapsto -x$

c. $x \mapsto 2x$

d. $x \mapsto \frac{1}{x}$

e. $x \mapsto -\frac{1}{x}$.

Bài 2. Cho D là tập hợp các đường thẳng d trong mặt phẳng có phương trình

$$y = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

Ánh xạ

$$\begin{aligned}\varphi: D \times D &\rightarrow D \\ (a_1x + b_1, a_2x + b_2) &\mapsto a_1a_2x + (b_1 + b_2)\end{aligned}$$

Chứng minh D với phép toán đã cho lập thành một nhóm và ánh xạ $f: D \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, d \mapsto f(d) = a$ là một đồng cấu nhóm. Xác định $\text{Ker } f$.

Bài 3. Giả sử G là một nhóm xyclic hữu hạn cấp n . Chứng minh rằng G đẳng cấu với nhóm cộng các số nguyên theo mod n .

Giả sử G là một nhóm xyclic vô hạn cấp n . Chứng minh rằng G đẳng cấu với nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$.

Bài 4. Cho G là một nhóm. Ánh xạ

$$\varphi: G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1}$$

Chứng minh rằng φ là tự đẳng cấu của G khi và chỉ khi G là nhóm Aben.

§6: Mở rộng một vị nhóm giao hoán thành một nhóm.

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

Người học biết:

- Khái niệm đồng cấu nhóm, ảnh và hạt nhân, các định lý về đồng cấu nhóm.
- Hiểu việc xây dựng các phép toán ở Tiểu học trên cơ sở đồng cấu.
- Kiến thức về mở rộng tập hợp số
- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các cấu trúc của các tập số ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Xây dựng và chứng minh các đồng cấu nhóm, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.
- Vận dụng linh hoạt kiến thức trong giải bài tập.
- Xây dựng phép toán tương ứng trên các tập hợp số trong chương trình Tiểu học

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung.
- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

Ta đã biết rằng trong một nhóm, đẳng thức $ab = ac$ (hay $ba = ca$) kéo theo đẳng thức $b = c$. Có điều này là do sự tồn tại phần tử đối xứng a^{-1} của a . Nhưng nếu ta xét một nửa nhóm thì $ab = ac$ chưa chắc đã kéo theo $b = c$; chẳng hạn trong vị nhóm nhân các số tự nhiên, ta có đẳng thức $0 \cdot 4 = 0 \cdot 7$ nhưng $4 \neq 7$. Người ta đặt ra câu hỏi: *Có thể mở rộng vị nhóm thành một nhóm được hay không?*

1. Đối xứng hoá

Nhận xét : Giả sử M là một vị nhóm giao hoán. Kí hiệu M^* là tập hợp tất cả các phần tử chính quy của M . Khi đó M^* có các tính chất : $e \in M^*$ (do e là phần tử chính quy) và M^* là ổn định với phép toán trên M . Thật vậy, với $a, b \in M^*$, nếu $abx = aby$ thì do a chính quy nên $bx = by$. Mà b là chính quy nên ta suy ra $x = y$. Do đó $ab \in M^*$.

Định lí. Cho M là một vị nhóm giao hoán và M^* là tập hợp tất cả các phần tử chính quy của M . Khi đó tồn tại một vị nhóm giao hoán $\overline{M}$ và một đơn cấu $f : M \rightarrow \overline{M}$ thỏa mãn các tính chất sau :

- i) Các phần tử của $f(M^*)$ có đối xứng trong M^* .
- ii) Nếu $x \in M$ thì $x = f(a)f(b)^{-1}$ với $a \in M, b \in M^*$.
- iii) Cặp $\overline{M}$ và f là duy nhất (sai khác một đẳng cấu).

Chứng minh.

Xây dựng tập $\overline{M}$.

Trên tập $M \times M^*$ xét quan hệ hai ngôi S :

$$(a, b) S (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b.$$

Khi đó ta có thể chứng minh được S là quan hệ tương đương.

Đặt $\overline{M} = M \times M^* / S$. Ta sẽ xác định một phép Toán trên $\overline{M}$ để $\overline{M}$ trở thành một vị nhóm giao hoán. Thật vậy xét

$$\begin{aligned} \circ : \quad \overline{M} \times \overline{M} &\rightarrow \overline{M} \\ ((a, b), (c, d)) &\mapsto (ac, bd) \end{aligned}$$

thì $\circ$ là ánh xạ vì nếu

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \overline{(a, b)} = \overline{(a', b')} \\ \overline{(c, d)} = \overline{(c', d')} \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ab' = a'b \\ cd' = c'd \end{array} \right\} \Rightarrow ab'cd' = a'bc'd \\ &\Rightarrow acb'd' = a'c'bd \Rightarrow \overline{(ac, bd)} = \overline{(a'c', b'd')} \end{aligned}$$

Ta thấy phép toán $\circ$ có tính giao hoán, kết hợp.

Phần tử trung lập là $\overline{(e, e)}$ hay $\overline{(a, a)}$.

Vậy $\overline{M}$ với $\circ$ là một vị nhóm giao hoán.

Xét ánh xạ $f : M \rightarrow \overline{M}$

$$a \mapsto \overline{(a, e)}.$$

Dễ thấy f là một đơn cấu.

Với mỗi $a \in M^*$ thì đối xứng của $f(a) = \overline{(a, e)}$ trong $\overline{M}$ là $\overline{(e, a)}$ vì

$$\overline{(a, e)} \circ \overline{(e, a)} = \overline{(ae, ea)} = \overline{(a, a)} = \overline{(e, e)}.$$

Với mỗi $x = \overline{(a,b)} \in \overline{M}$ ta có $\overline{(a,b)} = \overline{(a,e)} \circ \overline{(e,b)} = \overline{(a,e)} \circ \overline{(b,e)}^{-1} = f(a)(f(b))^{-1}$.

c. Giả sử có X và đơn cấu $g: M \rightarrow X$ cũng thỏa mãn điều kiện của định lí. Ta đi chứng minh rằng tồn tại một đẳng cấu φ từ $\overline{M}$ đến X sao cho $g = \varphi.f$.

Ứng với mỗi phần tử $x = \overline{(a,b)} = f(a).f(b)^{-1}$, ta xét phần tử $g(a).g(b)^{-1}$. Phần tử $g(a).g(b)^{-1}$ chỉ phụ thuộc vào $\overline{(a,b)}$. Thật vậy,

Giả sử $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$, nghĩa là $(a,b)S(a',b')$ hay $ab' = a'b$. Từ đó vì g là một đồng cấu nên $g(a).g(b') = g(ab') = g(a'b) = g(a')g(b)$. Suy ra $g(a).g(b)^{-1} = g(a')g(b')^{-1}$.

Vậy ta có ánh xạ $\varphi: \overline{M} \rightarrow X; f(a)f(b)^{-1} \mapsto g(a)g(b)^{-1}$. Dễ dàng chứng minh φ là một đẳng cấu và $g = \varphi.f$.

Định lí được chứng minh.

Nhận xét. f là một đơn cấu nên ta có thể đồng nhất $f(a)$ với $a, \forall a \in M$, cho nên mọi phần tử của $\overline{M}$ có thể viết dưới dạng $ab^{-1}; a \in M, b \in M^*$.

Hơn nữa, nếu $M^* = M$ thì mọi phần tử của M đều có đối xứng trong $\overline{M}$, do đó ta có hệ quả.

Hệ quả. Nếu M là vị nhóm giao hoán và mỗi phần tử đều là chính quy thì $\overline{M}$ là nhóm.

2. Áp dụng định lí để mở rộng các tập hợp số.

a. Mở rộng tập số $\mathbb{N}$ thành tập số nguyên $\mathbb{Z}$.

Ta có $(\mathbb{N}, +)$ là vị nhóm giao hoán.

Mỗi số tự nhiên đều là chính quy nên theo hệ quả tập $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / S$ là một nhóm. Kí hiệu $\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{N}}$.

Mỗi phần tử của $\mathbb{Z}$ là một lớp tương đương $\overline{(m,n)}$. Đồng nhất $\overline{(m,0)} \equiv m$ thì $\overline{(m,n)}$ có dạng $m - n; m, n \in \mathbb{Z}$.

Phép toán trong $\mathbb{Z}$ cảm sinh bởi phép toán cộng các số tự nhiên và cũng kí hiệu là $+$ (trong định lí ta kí hiệu là $\circ$).

b. Mở rộng tập số $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ thành tập số hữu tỉ dương $\mathbb{Q}^+$.

Ta có $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ là một vị nhóm giao hoán.

Mỗi phần tử thuộc $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ đều là chính quy. Khi đó tập $\overline{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$ cùng với phép nhân là một vị nhóm giao hoán, kí hiệu $\mathbb{Q}^+$.

Các phần tử của $\mathbb{Q}^+$ là một lớp tương đương $\overline{(a,b)}$. Đồng nhất $\overline{(a,1)} \equiv a$ thì $\overline{(a,b)}$ có dạng ab^{-1} với $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ta thường viết ab^{-1} dưới dạng $\frac{a}{b}$.

Các số tự nhiên $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ được đồng nhất với $\frac{n}{1}$.

ỨNG DỤNG TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Xét các bài toán sau:

Bài toán 1: Có 8 quả cam, chia đều cho 4 người. Hỏi mỗi người có bao nhiêu quả cam?

Bài toán 2: Có 3 quả cam, chia đều cho 4 người. Hỏi mỗi người có bao nhiêu quả cam?

Trong thực tế, hai bài toán trên luôn luôn thu được lời giải.

Trong nội tại toán học, nếu xét trên tập hợp số tự nhiên, bài toán 1 luôn có lời giải. (Để tìm số cam của mỗi người, ta thực hiện phép chia $8 : 2 = 4$). Với Bài toán 2 không thu được lời giải. Cũng tương tự như bài toán 2, có một số phương trình sau cũng không tìm được nghiệm trên tập số tự nhiên. Chẳng hạn:

$$x + 7 = 5$$

$$2x + 1 = 3$$

Vấn đề đặt ra liệu có hay không một tập hợp nào đó, mà trên tập hợp này Bài toán 2 luôn có lời giải và các phương trình trên có nghiệm? Lời đáp cho câu trả lời này chính là sự mở rộng tập hợp.

Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là vị nhóm giao hoán, ta có thể mở rộng thành tập hợp mà phương trình $x + 7 = 5$ có nghiệm.

Xét tập $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b), a, b \in \mathbb{N}\}$ và quan hệ tương đương S được xác định như sau:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a, b) S (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$$

Trên tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / S = \{(\overline{a, b}), a, b \in \mathbb{N}\}$, phương trình dạng $x + 7 = 5$ luôn luôn có nghiệm.

Xét $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^* = \{(a, b), a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*\}$ và quan hệ tương đương S được xác định như sau:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* : (a, b) S (c, d) \Leftrightarrow ad = cb$$

Trên tập hợp $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / S = \{(\overline{a, b}), (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*\}$ phương trình dạng $2x + 1 = 4$ luôn có nghiệm và bài toán 2 có lời giải.

VÀNH VÀ TRƯỜNG

Trong các bài trên ta đã xét những tập hợp được trang bị một phép Toán. Trong đó ta cũng xét các khái niệm nửa nhóm, vị nhóm và nhóm. Thực tế các tập hợp ta đã biết trong chương trình Toán phổ thông đều có hai phép toán cộng và nhân. Trong chương này ta sẽ xét các tập hợp được trang bị hai phép toán. Từ việc xét tính chất của hai phép toán ta có thêm hai cấu trúc đại số đó là **vành** và **trường**. Ta sẽ thấy hai cấu trúc này thường xuyên có mặt trong chương trình toán phổ thông.

§1: Vành

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

Giúp người học nắm vững

- Cấu trúc đại số vành và một số khái niệm liên quan : vành con, ideal, miền nguyên, vành sắp thứ tự.

- Một số tính chất đơn giản, các định lý tương đương dùng để kiểm tra các cấu trúc đại số.

- Khái niệm đồng cấu vành, ảnh và hạt nhân.

- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các cấu trúc của các tập số ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Chứng minh các tập hợp có cấu trúc đại số nào, xác định các phần tử đặc biệt.

- Xây dựng và chứng minh các đồng cấu vành, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.

- Vận dụng linh hoạt kiến thức trong giải bài tập.

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung .

- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Định nghĩa và ví dụ

1.1. Định nghĩa

Tập X cùng với hai phép toán cộng và phép nhân (kí hiệu lần lượt là $+$ và $\cdot$) được gọi là **vành** nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

i. X với phép cộng là một nhóm giao hoán.

ii. X với phép nhân là một nửa nhóm.

iii. Phép nhân có tính chất phân phối đối với phép cộng. Kí hiệu vành $(X, +, \cdot)$

Phần tử trung lập của phép cộng gọi là phần tử không, kí hiệu 0.

Nếu X là vị nhóm đối với phép nhân thì vành X gọi là vành có đơn vị. Phần tử đơn vị của vành kí hiệu là 1.

Nếu phép nhân có tính giao hoán thì vành X được gọi là vành giao hoán.

1.2. Ví dụ

1. Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$, tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ với phép cộng và phép nhân thông thường là các vành giao hoán, có đơn vị.

2. Tập $\{0\}$ với phép cộng $0+0=0$, phép nhân $0.0=0$ lập thành một vành, gọi là vành không.

3. Xét nhóm $\mathbb{Z}_6$ với phép cộng $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$, phép nhân $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$. Khi đó

- $(\mathbb{Z}_6, +)$ là nhóm giao hoán.

- $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ là nửa nhóm vì $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{ab} \cdot \overline{c} = \overline{abc} = \overline{a}(\overline{b} \cdot \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{bc} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$

- Phép nhân phân phối với phép cộng vì

$$\begin{aligned}\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) &= \overline{a} \cdot \overline{b+c} = \overline{a(b+c)} \\ &= \overline{ab+ac} = \overline{ab} + \overline{ac} = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}\end{aligned}$$

Tương tự $(\overline{b} + \overline{c})\overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{a} + \overline{c} \cdot \overline{a}$.

- Phần tử đơn vị của phép nhân là $\overline{1}$ vì $\overline{1} \cdot \overline{a} = \overline{1a} = \overline{a} = \overline{a} \cdot \overline{1} = \overline{a} \cdot \overline{1}$.

- Phép nhân có tính giao hoán vì: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab} = \overline{ba} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.

Vậy $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ là vành giao hoán có đơn vị.

1.3. Một số tính chất đơn giản

Mệnh đề. Cho X là vành, $x, y, z \in X$. Khi đó

$$i. 0x = 0 = x0$$

$$ii. x(-y) = -xy = (-x)y;$$

$$iii) x(y-z) = xy - yz, (y-z)x = yz - zx.$$

Chứng minh i. Ta có $0 = 0+0$ nên $0x = (0+0)x = 0x + 0x$.

Vì X là nhóm cộng nên theo luật giản ước ta có $0x = 0$. Tương tự $x0 = 0$.

ii. Ta có $y + (-y) = 0$ nên theo câu i) ta có $0 = x0 = x(-y+y) = x(-y) + xy$.

Từ đó suy ra $x(-y) = -xy$. Tương tự $(-x)y = -xy$.

iii. Từ ii) suy ra $x(y-z) = x(y+(-z)) = xy + x(-z) = xy - xz$.

2. Ước của không. Miền nguyên

2.1. Ước của không

Định nghĩa. X là vành giao hoán, phần tử $a \neq 0$ của X được gọi là ước của không nếu $\exists 0 \neq b \in X$ sao cho $ab = 0$.

Ví dụ. Trong vành $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, các phần tử $\bar{2}$, $\bar{3}$ và $\bar{4}$ là các ước của không vì: $\bar{2} \neq \bar{0}$, $\bar{3} \neq \bar{0}$, $\bar{4} \neq \bar{0}$ nhưng $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$ và $\bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{12} = \bar{0}$.

Phần tử $\bar{5}$ không là ước của không vì nếu tồn tại $\bar{b} \neq \bar{0}$ sao cho $\bar{5} \cdot \bar{b} = \bar{5b} = \bar{0}$ thì $5b:6$ suy ra $b:6$ hay $\bar{b} = \bar{0}$ (trái với giả thiết).

2.2. Miền nguyên

Định nghĩa. Một vành giao hoán có đơn vị khác 0 và không có ước của không gọi là *miền nguyên*.

Nhận xét: Trong miền nguyên X nếu $ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$

Ví dụ. 1. Các vành số $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ đều là các miền nguyên. (Theo nhận xét trên).

2. Vành $\mathbb{Z}_5$ là miền nguyên vì giả sử có $\bar{a}, \bar{b}$ sao cho $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$ thì $ab:5$ suy ra $a:5$ hoặc $b:5$. Do đó $\bar{a} = \bar{0}$ hoặc $\bar{b} = \bar{0}$.

3. Vành con. Ideal

3.1. Vành con

3.1.1. Định nghĩa. Cho X là vành, A là bộ phận của X ổn định với hai phép toán. A được gọi là *vành con* của X nếu A với hai phép toán trên X là một vành.

3.1.2. Định lí. Giả sử X là một vành, $\emptyset \neq A \subset X$. Khi đó A là vành con của X nếu

$$\forall x, y \in A \quad \text{ta có } xy \in A, x - y \in A.$$

Chứng minh. Từ $A \neq \emptyset$, $x - y \in A$ suy ra A là nhóm con của nhóm cộng X . Khi đó A ổn định với phép cộng. Theo giả thiết ta cũng có A ổn định với phép nhân. Do phép cộng trong X có tính giao hoán nên $(A, +)$ là nhóm cộng giao hoán.

Do phép nhân trong X có tính kết hợp và phân phối với phép cộng nên A là nửa nhóm với phép nhân và trong A có luật phân phối. Vậy A là vành con của X .

3.1.3. Ví dụ

1. Với vành X bất kì, X luôn có hai vành con là $\{0\}, X$, gọi là vành con tầm thường.

2. Vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ là vành con của vành các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, vành $\mathbb{Q}$ là vành con của vành các số thực $\mathbb{R}$.

3. $\mathbb{Z}$ là vành các số nguyên, tập hợp $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ với phép cộng và nhân các số thực là vành con của vành các số thực $\mathbb{R}$. Thật vậy, ta có $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \neq \emptyset$ do $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Với $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}], xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

$x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Theo định lí ta có $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ là vành con của $\mathbb{R}$.

3.2. Ideal

3.2.1. Định nghĩa. Cho X là vành, vành con I của X được gọi là *ideal trái (phải)* của X nếu $\forall a \in I, \forall x \in X$ thì $xa \in I$ ($ax \in I$).

I được gọi là ideal của X nếu I vừa là ideal trái vừa là ideal phải của X .

Chú ý : Nếu X là vành giao hoán thì ideal trái cũng là ideal phải.

Mỗi ideal trái hoặc mỗi ideal phải đều là một vành con. Trái lại một vành con của một vành không nhất thiết là một ideal trái hoặc ideal phải. Chẳng hạn, vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ là vành con của vành các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, nhưng $\mathbb{Z}$ không là ideal của $\mathbb{Q}$.

3.2.2. Định lí. X là vành, $\emptyset \neq I \subset X$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương.

i. I là ideal trái (phải) của X .

ii. $\forall x, y \in I \Rightarrow xy \in I, x - y \in I$ (1)

$\forall a \in I, \forall x \in X \Rightarrow xa \in I, (ax \in I)$ (2)

Chứng minh

i $\Rightarrow$ ii Hiển nhiên suy ra từ định nghĩa.

ii $\Rightarrow$ i Từ (1) suy ra A là vành con. Từ (2) suy ra I là ideal trái (phải) của X .

3.2.3. Ví dụ

1. Một vành X bất kì luôn có hai ideal tầm thường là $\{0\}, X$.

2. Vành các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ chỉ có hai ideal là $\{0\}, \mathbb{Q}$. Thật vậy, hiển nhiên $\{0\}, \mathbb{Q}$ là 2 ideal của $\mathbb{Q}$.

Giả sử I là một ideal của $\mathbb{Q}$, $I \neq \{0\}$. Khi đó tồn tại $a \in I, a \neq 0, a^{-1} \in K$. Khi đó phần tử nghịch đảo a^{-1} của a cũng thuộc $\mathbb{Q}$. Theo định nghĩa ideal ta có: $1 = aa^{-1} \in I$. Lại theo định nghĩa ideal ta có: $\forall x \in \mathbb{Q}, 1x = x \in I$. Vậy $I = \mathbb{Q}$.

3. Trong vành số nguyên $\mathbb{Z}$, với mỗi $k \in \mathbb{Z}$ thì $k\mathbb{Z} = \{kz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ là một ideal của $\mathbb{Z}$.

Thật vậy, với mọi $x = kz_1, y = kz_2 \in k\mathbb{Z}$ ta có: $xy = k(kz_1z_2), x - y = k(z_1 - z_2) \in k\mathbb{Z}$,

$\forall a \in k\mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}$ ta có $ra = ar = (kz)r = k(zr)$ (do $\mathbb{Z}$ là vành giao hoán).

4. Đồng cấu

4.1. Định nghĩa. Cho hai vành X, Y , ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một *đồng cấu vành* nếu

$\forall x, y \in X : f(x + y) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y)$

Đồng cấu f được gọi là *đơn cấu*, *toàn cấu*, *đẳng cấu* nếu ánh xạ f lần lượt là đơn ánh, toàn ánh, song ánh.

Ta gọi $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in X\}, \text{Ker } f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ lần lượt là *ảnh* và *hạt nhân* của đồng cấu f .

4.2. Ví dụ

1. X là vành, ánh xạ $f : X \rightarrow X, x \mapsto x$ là đồng cấu vành, gọi là đồng cấu đồng nhất.

2. A là vành con của vành X , ánh xạ

$j : A \rightarrow X, x \mapsto x$ là một đồng cấu, gọi là phép nhúng chính tắc.

3. X, Y là vành, ánh xạ $f : X \rightarrow Y, x \mapsto 0$ là đồng cấu vành, gọi là đồng cấu không.

4. Ánh xạ $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6, x \mapsto \bar{x}$ là đồng cấu vành. Thật vậy,

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, p(x+y) = \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} = p(x) + p(y), p(xy) = \overline{xy} = \bar{x} \cdot \bar{y} = p(x)p(y).$$

Với $\bar{x} \in \mathbb{Z}_6, \exists x \in \mathbb{Z} \mid p(x) = \bar{x}$ nên $\text{Im } f = \mathbb{Z}_6$.

$$\text{Ker } p = \{x \in \mathbb{Z} \mid \bar{x} = \bar{0}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0 \pmod{6}\} = 6\mathbb{Z}.$$

4.2. Định lí

Cho đồng cấu vành $f: X \rightarrow Y$. Khi đó:

- i) $\text{Im } f$ là vành con của Y ,
- ii) $\text{Ker } f$ là ideal của X .

ỨNG DỤNG TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

1. Một số bài toán trong SGK Tiểu học

Bài 1 (Toán 2 – Tr133). Tính nhẩm

$$\begin{array}{ll} 0 \times 4 = & 0 \times 2 = \\ 4 \times 0 = & 2 \times 0 = \end{array}$$

Bài 2 (bài 3 – Toán 2 – tr 133) Số ?

$$\begin{array}{ll} \square \times 5 = 0 & 3 \times \square = 0 \\ \square : 5 = 0 & \square : 3 = 0 \end{array}$$

Bài 3 (Bài 3 Toán 1 tr 163).

$$\begin{array}{|c|} \hline > \\ \hline < \\ \hline = \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 30 + 6 \dots 6 + 30 \\ 45 + 2 \dots 3 + 45 \\ 55 \dots 50 + 4 \end{array}$$

2. Vận dụng tính chất của vành con

Ta có $n\mathbb{Z}$ là một vành con của $\mathbb{Z}$. Khi đó ta có với $na, nb \in n\mathbb{Z}$ ta có $na \pm nb \in n\mathbb{Z}$.

Cụ thể ta sẽ có các tính chất áp dụng trong giải toán ở Tiểu học:

Với $n = 2$ ta có: Hiệu (tổng) của hai số chẵn là số chẵn

Với $n = 3$ ta có: Hiệu (tổng) hai số chia hết cho 3 là số chia hết cho 3.

Ta có một số ví dụ bài toán nâng cao ở Tiểu học như sau:

Bài 1. Không làm phép tính xét xem các tổng và hiệu dưới đây có chia hết cho 3 hay không

a. $1236 + 2155 + 42702$

b. $92616 - 48372$

Bài 2. Một công ty có số công hưởng mức lương 360 000đ. Số khác hưởng mức 495 000đ, số còn lại hưởng 672 000đ/ tháng. Sau khi phát lương tháng 7 cho công nhân cô kế toán cộng hết 273 815 000đ. Hỏi cô kế toán tính đúng hay sai? Tại sao?

Bài 3. Có 5 hộp, mỗi hộp chỉ chứa toàn bi xanh hoặc toàn bi đỏ. Số bi trong mỗi hộp tương ứng là: 110 viên bi; 105 viên bi; 100 viên bi; 115 viên bi và 130 viên bi. Nếu lấy đi một hộp thì

số bi xanh trong các hộp còn lại sẽ nhiều gấp 3 lần số bi đỏ. Hỏi có bao nhiêu bi trong hộp bị lấy đi?

Bài 4. Một cửa hàng có 5 rổ cam và quýt, trong mỗi rổ chỉ đựng một loại quả. Số quả trong mỗi rổ lần lượt là: 50, 45, 40, 55, 70 quả. Sau khi bán đi 1 rổ thì số cam còn lại gấp 3 lần số quả quýt. Hỏi trong các rổ còn lại, rổ nào đựng cam ? rổ nào đựng quýt?

BÀI TẬP

Bài 1. Cho vành tích Đề-các $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ với hai phép toán như sau:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) (c, d) = (ac, bd).$$

Chứng minh rằng $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ là một vành giao hoán có đơn vị.

Bài 2. Chứng minh rằng với $4 \in \mathbb{Z}$, tập $4\mathbb{Z} = \{4z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ là một ideal vành $\mathbb{Z}$.

Một cách tổng quát chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{Z}$, tập $a\mathbb{Z} = \{az \mid z \in \mathbb{Z}\}$ là một ideal vành $\mathbb{Z}$.

Bài 3. Các ánh xạ sau đây có phải là đồng cấu vành hay không ? ánh xạ nào là đơn cấu, ánh xạ nào là toàn cấu ?

a. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = x$,

b. $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, g(x) = 3x$,

c. $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}], h(x) = x$,

d. $k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}], k(x) = x\sqrt{2}$.

Bài 4. Chứng minh rằng :

a. Tích của hai đồng cấu là đồng cấu.

b. Tích của hai đơn cấu là đơn cấu.

c. Tích của hai toàn cấu là toàn cấu.

Bài 5. Có thể thay mỗi chữ cái trong phép tính sau bằng chữ số thích hợp để được một phép tính đúng không? Vì sao?

HOC HOC HOC

$$\begin{array}{r} \text{---} \\ \text{TOT TOT TOT} \\ 1234 \ 567 \ 891 \end{array}$$

Bài 6. Một cửa hàng rau quả có 5 rổ đựng cam và chanh (trong mỗi rổ chỉ đựng một loại quả). Số quả trong mỗi rổ lần lượt là 104; 115; 132; 136 và 148 quả. Sau khi bán được một rổ cam, người bán hàng thấy rằng số chanh còn lại gấp 4 lần số cam. Hỏi cửa hàng đã có bao nhiêu quả mỗi loại?

Bài 7. Bạn Hoài đi mua đồ dùng học tập như sau:

1 cái thước	3000 đồng
2 quyển sổ	6000 đồng
1 cái bút	3000 đồng
1 bộ màu	21000 đồng
1 chiếc cặp	60000 đồng

Khi trả tiền Hoài đưa cho cô bán hàng 100000 đồng và cô bán hàng và cô phụ lại cho Hoài 5000 đồng. Lan đứng một bên nhanh nhẩu nói: “ Cô tính đang sai tiền”.

Em hãy giải thích tại sao Lan lại phát hiện nhanh như vậy?

Bài 8. Hai bạn Minh và Nhung đi mua 9 gói bánh và 6 gói kẹo để lớp liên hoan. Nhung đưa cho cô bán hàng hai tờ tiền 200 000 đồng và cô trả lại 36 000 đồng. Minh nói ngay : « Cô tính sai rồi ! ». Bạn hãy cho biết Minh nói đúng hay sai ? Giải thích tại sao ? Biết giá tiền mỗi gói bánh kẹo là một số nguyên đồng ?

§2 : Trường

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

Người học nắm vững

- Cấu trúc đại số trường và một số khái niệm liên quan : trường con, trường sắp thứ tự.

- Một số tính chất đơn giản, các định lý tương đương dùng để kiểm tra các cấu trúc đại số.

- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các cấu trúc của các tập số ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Chứng minh các tập hợp có cấu trúc đại số nào, xác định các phần tử đặc biệt.

- Xây dựng và chứng minh các đồng cấu vành, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.

- Kiểm tra vành có là vành hay trường sắp thứ tự không.

- Vận dụng linh hoạt kiến thức trong giải bài tập.

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung .

- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

1. Định nghĩa và ví dụ

1.1. Định nghĩa. Giả sử X là vành có đơn vị 1. Phần tử $a \in X$ được gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại phần tử $b \in X$ sao cho $ab = 1$. Khi đó b gọi là *phần tử nghịch đảo* của a , kí hiệu a^{-1} .

Miền nguyên X gọi là *trường* nếu mọi phần tử khác 0 đều khả nghịch.

Nhận xét: Một trường là một vành giao hoán có đơn vị khác 0, không có ước của không, mọi phần tử khác không đều là khả nghịch.

1.2. Ví dụ

1. Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, tập các số thực $\mathbb{R}$, tập các số phức $\mathbb{C}$ là những trường.

2. Vành $\mathbb{Z}_5$ là trường. Thật vậy,

$\mathbb{Z}_5$ là miền nguyên.

Với mọi $\bar{a} \in \mathbb{Z}_5, \bar{a} \neq \bar{0}$ thì $a \nmid 5$. Do 5 là số nguyên tố nên $(a, 5) = 1$, khi đó tồn tại $u, v \in \mathbb{Z}$ sao cho $au + 5v = 1$. Ta có $\overline{au + 5v} = \bar{1} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{u} + \bar{5}\bar{v} = \bar{1} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{u} = \bar{1}$,

Tức là $\bar{a}$ khả nghịch.

Tổng quát: $\mathbb{Z}_p$ là trường khi và chỉ khi p là số nguyên tố.

2. Trường con

2.1. Định nghĩa. Cho X là trường, A là bộ phận ổn định của X . Khi đó A được gọi là trường con của trường X nếu A cũng là một trường với các phép toán cộng và nhân trên trường X .

2.2. Định lí. (Tiêu chuẩn nhận biết trường con) Cho X là trường, $L \subset X$, L có ít nhất hai phần tử. L là trường con của X khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \forall x, y \in L \Rightarrow xy \in L, x - y \in L & (1) \\ \forall x \in L, x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in L & (2) \end{cases}$$

Chứng minh.

" $\Rightarrow$ " Hiển nhiên.

" $\Leftarrow$ " Từ (1) và $L \neq \emptyset$ suy ra L là một vành con của X . Vì phép nhân trong X là giao hoán nên L là vành giao hoán.

Do L có ít nhất hai phần tử nên L chứa $x \neq 0$.

Theo (2): $x^{-1} \in L$ nên ta có $1 = xx^{-1} \in L$. Vậy L là vành giao hoán có đơn vị khác 0.

Do X là miền nguyên nên L là miền nguyên. Theo (2): Mọi phần tử khác 0 của L đều khả nghịch. Vậy L là trường con của X .

3. Vành và trường sắp thứ tự

3.1. Định nghĩa. Vành X giao hoán có đơn vị khác 0 được gọi là vành sắp thứ tự nếu trên X có quan hệ thứ tự $\leq$ thỏa mãn các điều kiện: $\forall a, b, c \in X$

i. Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$,

ii. Nếu $a \leq b$ và $0 \leq c$ thì $ac \leq bc$.

3.2. Định lí. Giả sử R là vành sắp thứ tự, $a, b, c \in R$. Khi đó:

i. $a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$

ii. $0 \leq a, 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a + b, 0 \leq ab$,

iii. $a \leq b, c \leq 0 \Rightarrow bc \leq ac$,

iv. $\forall a \in R, 0 \leq a^2$,

v. $0 < 1$ ($0 \leq 1, 0 \neq 1$).

ỨNG DỤNG TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Vận dụng tính sắp thứ tự của trường các số hữu tỉ ta có một số ứng dụng trong bài toán so sánh hai phân số ở Tiểu học như sau

1- So sánh phân số bằng cách so sánh phần bù với đơn vị của phân số

Phần bù với đơn vị của phân số là hiệu giữa 1 và phân số đó.

- Trong hai phân số, phân số nào có phần bù lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn và ngược lại.

Ví dụ: So sánh các phân số sau bằng cách thuận tiện nhất.

$$\frac{2000}{2001} \text{ và } \frac{2001}{2002}$$

Bước 1: Tìm phần bù

$$\text{Ta có: } 1 - \frac{2000}{2001} = \frac{1}{2001}$$

$$1 - \frac{2001}{2002} = \frac{1}{2002}$$

Bước 2: So sánh phần bù với nhau, kết luận 2 phân số cần so sánh.

$$\text{Vì } \frac{1}{2001} > \frac{1}{2002} \text{ nên } \frac{2000}{2001} < \frac{2001}{2002}$$

* Chú ý: đặt $A = \text{Mẫu 1} - \text{Tử 1}$

$$A = \text{Mẫu 2} - \text{Tử 2}$$

Cách so sánh phần bù được dùng khi $A = A$. Nếu trong trường hợp $A \neq A$ ta có thể sử dụng tính chất cơ bản của phân số để biến đổi đưa về 2 phân số mới có hiệu giữa mẫu và tử của 2 phân số bằng nhau:

$$\text{Ví dụ: } \frac{2000}{2001} \text{ và } \frac{2001}{2003} \text{ Ta có: } \frac{2000}{2001} = \frac{2000 \times 2}{2001 \times 2} = \frac{4000}{4002}$$

$$\text{Bước 1 ta có: } 1 - \frac{4000}{4002} = \frac{2}{4002}$$

$$1 - \frac{2001}{2003} = \frac{2}{2003}$$

$$\text{Bước 2: Vì } \frac{2}{4002} < \frac{2}{2003} \text{ nên } \frac{4000}{4002} > \frac{2001}{2003} \text{ hay } \frac{2000}{2001} > \frac{2001}{2003}$$

2- So sánh phân số bằng cách so sánh phần hơn với đơn vị của các phân số:

- Phần hơn với đơn vị của phân số là hiệu của phân số và 1.
- Trong 2 phân số, phân số nào có phần hơn thì phân số đó lớn hơn.

$$\text{Ví dụ: So sánh: } \frac{2001}{2000} \text{ và } \frac{2002}{2001}$$

$$\text{Bước 1: Ta có: } \frac{2001}{2000} - 1 = \frac{1}{2000}$$

$$\frac{2002}{2001} - 1 = \frac{1}{2001}$$

Bước 2: So sánh phần hơn của đơn vị, kết luận về 2 phân số cần so sánh

$$\text{Vì } \frac{1}{2000} > \frac{1}{2001} \text{ nên } \frac{2001}{2000} > \frac{2002}{2001}$$

Chú ý: Đặt B = Tử 1 – Mẫu 1

$$B = \text{Tử 2} - \text{Mẫu 2}$$

Cách so sánh phân hơn được dùng khi $B = B$. Nếu trong trường hợp $B \neq B$ ta có thể sử dụng tính chất cơ bản của phân số để biến đổi đưa về 2 phân số mới có hiệu giữa tử và mẫu của 2 phân số bằng nhau:

Ví dụ: $\frac{2001}{2000}$ và $\frac{2002}{2001}$

Bước 1: Ta có: $\frac{2001}{2000} = \frac{2001 \times 2}{2000 \times 2} = \frac{4002}{4000}$

$$\frac{4002}{4000} - 1 = \frac{2}{4000}$$

$$\frac{2003}{2001} - 1 = \frac{2}{2001}$$

Bước 2 : Vì $\frac{2}{4000} < \frac{2}{2001}$ nên $\frac{4002}{4000} < \frac{2003}{2001}$

$$\text{Hay } \frac{20001}{2000} < \frac{2003}{2001}$$

3 – Đưa 2 phân số về dạng hỗn số để so sánh

- Khi thực hiện phép chia tử số cho mẫu số của 2 phân số ta được cùng thương và số dư thì ta đưa 2 phân số cần so sánh về dạng hỗn số rồi so sánh 2 hỗn số đó :

Ví dụ: So sánh: $\frac{47}{15}$ và $\frac{65}{21}$

$$\text{Ta có: } \frac{47}{15} = 3 \frac{2}{15}$$

$$\frac{65}{21} = 3 \frac{2}{21}$$

$$\text{Vì } \frac{2}{15} > \frac{2}{21} \text{ nên } 3 \frac{2}{15} > 3 \frac{2}{21}$$

$$\text{Hay } \frac{47}{15} > \frac{65}{21}$$

Hoặc khi thực hiện phép chia tử số cho mẫu số của 2 phân số ta được 2 thương khác nhau cũng đưa 2 phân số về hỗn số để so sánh.

Ví dụ: So sánh $\frac{41}{11}$ và $\frac{23}{10}$

$$\text{Ta có: } \frac{41}{11} = 3\frac{8}{11}$$

$$\frac{23}{10} = 2\frac{3}{10}$$

$$\text{Vì } 3 > 2$$

$$\text{Nên } 3\frac{8}{11} > 2\frac{3}{10} \text{ hay } \frac{41}{11} > \frac{23}{10}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng

a. $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ là trường con của trường số thực $\mathbb{R}$;

b. $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ là trường con của trường số phức

Bài 2. Chứng minh rằng một trường K tùy ý chỉ có hai ideal là $\{0\}$ và K .

Bài 3. Ta biết tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ là một bộ phận của vành các số nguyên $\mathbb{Z}$. Trên $\mathbb{Z}$ xác định quan hệ $\leq$ như sau :

$$a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $\mathbb{Z}$ với quan hệ $\leq$ là một vành sắp thứ tự.

Bài 4. So sánh phân số bằng cách hợp lý nhất.

a. $\frac{7}{11}$ và $\frac{17}{23}$

e. $\frac{1}{a+1}$ và $\frac{1}{a-1}$

b. $\frac{12}{48}$ và $\frac{13}{47}$

f. $\frac{23}{48}$ và $\frac{47}{92}$

c. $\frac{12}{17}$ và $\frac{7}{153}$

g. $\frac{13}{27}$ và $\frac{27}{41}$

d. $\frac{1999}{2001}$ và $\frac{12}{11}$

h. $\frac{1119}{1999}$ và $\frac{1999}{2000}$

Bài 5.

a. Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự giảm dần.

$$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}; \frac{9}{10}$$

b. Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần.

$$\frac{26}{15}; \frac{215}{253}; \frac{10}{10}; \frac{26}{11}; \frac{152}{253}$$

c. Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần.

$$\frac{5}{6}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}$$

d. Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự từ lớn đến bé..

$$\frac{21}{25}; \frac{60}{81} \text{ và } \frac{19}{29}$$

e. Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự từ lớn đến bé..

$$\frac{15}{6}; \frac{6}{14}; 1; \frac{3}{5}; \frac{12}{15} \text{ và } \frac{2004}{1999}$$

Bài 6. Tìm phân số nhỏ nhất trong các phân số sau:

a. $\frac{1985}{1980}; \frac{19}{60}; \frac{1983}{1981}; \frac{30}{31}; \frac{1984}{1982}$

b. $\frac{196}{189}; \frac{14}{45}; \frac{39}{37}; \frac{21}{60}; \frac{175}{175}$

Bài 7. a. Tìm 6 phân số tối giản nằm giữa $\frac{1}{5}$ và $\frac{3}{8}$

b. Hãy viết 5 phân số khác nhau nằm giữa 2 phân số

$$\frac{2}{5} \text{ và } \frac{3}{5}; \frac{1995}{1997} \text{ và } \frac{1995}{1996}$$

Bài 8 : Hãy tìm 5 phân số có tử số chia hết cho 5 và nằm giữa 2 phân số

$$\frac{999}{1001} \text{ và } \frac{1001}{1003}; \frac{19}{10} \text{ và } \frac{11}{13}$$

Bài 9. So sánh các phân số (n là số tự nhiên).

a, $\frac{n+1}{n+2}$ và $\frac{n+3}{n+4}$ b, $\frac{n}{n+3}$ và $\frac{n-1}{n+4}$

Bài 10. Tìm phân số lớn nhất và phân số nhỏ nhất trong các phân số sau:

$$\frac{12}{49}; \frac{77}{18}; \frac{135}{100}; \frac{13}{47}; \frac{231}{123}$$

§3 : Vành đa thức

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

Giúp người học nắm vững

- Khái niệm vành đa thức trên trường số thực , bậc của đa thức, đa thức khả nghịch , đa thức bất khả quy, phép chia có dư , nghiệm của đa thức .

- Một số tính chất đơn giản, các định lý Bơdu, định lý cơ bản của số học
- Khái niệm ước chung lớn nhất của 2 đa thức, thuật toán Euclid tìm ước chung lớn nhất, tiêu chuẩn Aidentainơ, cách tìm nghiệm hữu tỷ của đa thức với hệ số nguyên.
- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các cấu trúc của các tập số ở Tiểu học.

2. Kỹ năng.

- Xây dựng và chứng minh một đa thức khả nghịch, đa thức bất khả quy.
- Biết tìm nghiệm của đa thức, nghiệm hữu tỷ của đa thức với hệ số nguyên, biết tìm ước chung lớn nhất của 2 đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử.
- Vận dụng linh hoạt kiến thức trong giải bài tập.
- Vận dụng kiến thức toán học cao cấp vào hệ thống các bài tập trong chương trình môn toán Tiểu học.

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung .
- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Vành đa thức trên trường số thực

- Đa thức $f(x)$ trên trường số thực $\mathbb{R}$ có dạng biểu thức :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

x là một kí hiệu, a_i là hệ số, a_ix_i là hạng tử.

- Kí hiệu $\mathbb{R}[x]$ là tập các đa thức trên trường số thực $\mathbb{R}$.

Hai đa thức $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ và $a'_0 + a'_1x + \dots + a'_mx^m$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $m = n$, $a_i = a'_i$, $i = \overline{0, n}$

- Trên $\mathbb{R}[x]$ xác định hai phép toán cộng và nhân :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m,$$

giả sử $m > n$. Khi đó ta xác định

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_mx^m.$$

$$f(x)g(x) = \sum_{i+j=k} (a_ib_j)x^k.$$

Ta thấy : $(\mathbb{R}[x], +)$ lập thành một nhóm giao hoán, phép nhân có tính kết hợp, giao hoán, có đơn vị 1, phép nhân phân phối với phép cộng. Vậy $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ là vành giao hoán có đơn vị, được gọi là vành đa thức một ẩn x trên trường số thực $\mathbb{R}$.

2. Vành đa thức

Định nghĩa. Giả sử A là vành giao hoán có đơn vị. Vành P gọi là *vành đa thức ẩn x lấy hệ tử trong A* , hay vắn tắt là *vành đa thức của ẩn x trên A* , kí hiệu là $A[x]$. Các phần tử của vành đó gọi là *đa thức của ẩn x lấy hệ tử trong A* . Trong một đa thức

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad a_i \in A$$

các $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ gọi là các *hệ tử* hay *hệ số*, các a_ix_i là các *hạng tử*, đặc biệt a_0 gọi là *hạng tử tự do*.

Ví dụ. Trên vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ ta có vành đa thức $\mathbb{Z}[x]$.

3. Bậc của đa thức. Đa thức khả nghịch

3.1. Bậc của đa thức

3.1.1. Định nghĩa. Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x], a_n \neq 0$.

Gọi n là *bậc* của $f(x)$, viết là *bậc $f(x) = n$* .

Đa thức 0 không có bậc

3.1.2. Ví dụ

1. Đa thức $f(x) = 1 + 2x - 3x^4$ có bậc là 4.

2. Với mọi $a \in K, a \neq 0$ ta có bậc $a = 0$.

Ngược lại nếu bậc $f(x) = 0$ thì $f(x) = a_0 \neq 0, a_0 \in K$.

3.1.3. Định lí. Giả sử K là một trường, $f(x), g(x)$ là các đa thức khác không của $K[x]$. Khi đó

i. *Bậc $(f(x) + g(x)) \leq \max(\text{bậc } f(x), \text{bậc } g(x))$*

ii. *Bậc $f(x)g(x) = \text{bậc } f(x) + \text{bậc } g(x)$*

Chứng minh. Giả sử

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad a_n \neq 0 \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m, \quad b_m \neq 0.$$

i. Giả sử $m > n$, khi đó

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + \dots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_mx^m.$$

Do đó bậc $(f(x) + g(x)) = m = \max(\text{bậc } f(x), \text{bậc } g(x))$.

+) Nếu $m = n$ và $a_n + b_n \neq 0$ thì $f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + \dots + (a_n + b_n)x^n$ do đó

$$\text{bậc } (f(x) + g(x)) = n = \max(\text{bậc } f(x), \text{bậc } g(x)).$$

+) Nếu $m = n$ và $a_n + b_n = 0$ thì bậc $(f(x) + g(x)) < n = \max(\text{bậc } f(x), \text{bậc } g(x))$.

ii) Ta có $f(x)g(x) = a_0b_0 + \dots + a_nb_mx^{n+m}$.

Do $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ và K là một trường nên $a_nb_m \neq 0$. Do đó

$$\text{Bậc } (f(x)g(x)) = n + m = \text{bậc } f(x) + \text{bậc } g(x).$$

3.2. Đa thức khả nghịch

3.2.1. Định nghĩa. Đa thức $f(x) \in K[x]$ gọi là *khả nghịch* nếu nó là phân tử khả nghịch của vành $K[x]$, tức là tồn tại $g(x) \in K[x]$ sao cho $f(x)g(x) = 1$.

3.2.2. Định lí. Giả sử K là một trường, $f(x) \in K[x]$. Khi đó $f(x)$ khả nghịch khi và chỉ khi $f(x) = a_0 \neq 0, a_0 \in K$.

Chứng minh

" $\Rightarrow$ " Giả sử $f(x)$ khả nghịch, khi đó tồn tại $g(x) \in K[x]$ sao cho $f(x)g(x) = 1$. Theo định lí trên ta có: $\text{bậc } f(x) + \text{bậc } g(x) = \text{bậc } (f(x)g(x)) = \text{bậc } (1) = 0$

Mà bậc $f(x) \geq 0$, bậc $g(x) \geq 0$ nên từ đẳng thức trên ta có

$$\text{bậc } f(x) = 0, \text{ bậc } g(x) = 0.$$

Vậy $f(x) = a_0 \neq 0, a_0 \in K$.

" $\Leftarrow$ " Khi $f(x) = a_0 \neq 0, a_0 \in K$ thì vì K là một trường nên $\exists a_0^{-1} \in K$ để $a_0 a_0^{-1} = 1$.

Ta cũng có $a_0, a_0^{-1} \in K[x]$ nên $f(x)$ phân tử khả nghịch của $K[x]$.

4. Phép chia có dư

4.1. Định nghĩa. Nếu đa thức $f(x) = g(x)h(x)$ thì ta nói:

- i) $f(x)$ chia hết cho $g(x)$, kí hiệu $f(x) : g(x)$,
- ii) $g(x)$ chia hết $f(x)$ hay $g(x)$ là ước của $f(x)$, kí hiệu là $g(x) \mid f(x)$.

4.2. Ví dụ

1. Đa thức $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, khi đó $(x^3 - 1) : (x - 1)$ hay $(x - 1) \mid (x^3 - 1)$.

2. Chia đa thức $f(x) = x^2 - 2$ cho đa thức $g(x) = x - 2$, ta thấy không thể tìm được đa thức $h(x)$ sao cho $f(x) = g(x)h(x)$ mà chỉ có

$$x^2 - 2 = (x - 2)(x + 2) + 2.$$

Trong trường hợp này ta nói phép chia $f(x)$ cho $g(x)$ là phép chia có dư.

4.2. Định lí. Giả sử K là một trường. Với mọi đa thức $f(x), g(x) \in K[x]$ trong đó $g(x) \neq 0$, đều tồn tại duy nhất hai đa thức $q(x), r(x)$ với bậc $q(x) < \text{bậc } r(x)$ hoặc $r(x) = 0$ sao cho

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x).$$

$q(x)$ gọi là thương, $r(x)$ gọi là dư.

5. Nghiệm của đa thức

5.1. Định nghĩa. Giả sử K là một trường

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in K[x]$$

Với mỗi $\alpha \in K$, phân tử

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n \in K$$

được gọi là giá trị của $f(x)$ tại α .

Nếu $f(\alpha) = 0$ thì α được gọi là một *ng nghiệm* của đa thức $f(x)$.

5.2. Ví dụ. Cho $f(x) = x^2 - 2x - 3 \in \mathbb{R}[x]$.

Ta có $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$ là giá trị của đa thức $f(x)$ tại 1.

3 là một nghiệm của $f(x)$ vì $f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$

5.3. Định lí

5.3.1. Định lí (Định lí Bôdu). Giả sử K là một trường, $f(x) \in K[x], \alpha \in K$. Khi đó $f(\alpha)$ là dư của phép chia $f(x)$ cho đa thức $x - \alpha$.

Chứng minh. Vì đa thức $x - \alpha \neq 0$ nên theo định lí 4.2, tồn tại hai đa thức $q(x)$ và $r(x)$ với bậc $r(x) < \text{bậc}(x - \alpha)$ hoặc $r(x) = 0$ sao cho

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x).$$

Nếu $r(x) = 0$ thì $f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) = 0$, tức là bằng dư.

Nếu $r(x) \neq 0$ thì vì bậc $r(x) < \text{bậc}(x - \alpha) = 1$ nên bậc $r(x) = 0$, tức là $r(x) = a$, với a là một phần tử nào đó của K .

Như vậy, $f(x) = (x - \alpha)q(x) + a$. Do đó $f(\alpha) = (\alpha - \alpha)q(\alpha) + a$.

Hệ quả. Giả sử K là một trường, $f(x) \in K[x]$. Khi đó $\alpha \in K$ là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x) \vdots (x - \alpha)$.

Ví dụ. Cho đa thức $f(x) = 2x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.

$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 11$ là dư trong phép chia $2x^3 - 3x + 1$ cho $x - 2$.

$2x^3 - 3x + 1$ chia hết cho $x - 1$ vì $f(1) = 0$. Cụ thể: $2x^3 - 3x + 1 = (x - 1)(2x^2 + 2x - 1)$.

5.3.2. Định lí cơ bản của đại số học số phức. Mọi đa thức bậc $n > 0$ trong vành $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$.

Định lí này khẳng định rằng, trường số phức $\mathbb{C}$ chứa đủ các nghiệm của mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ mà không cần mở rộng $\mathbb{C}$ thành một trường khác nữa.

Hệ quả. Mọi đa thức bậc $n > 0$ của $\mathbb{R}[x]$ vô nghiệm trong $\mathbb{R}$ đều có dạng $ax^2 + bx + c$,

$a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac < 0$.

6. Ước chung lớn nhất của hai đa thức

6.1. Định nghĩa. Giả sử $f(x), g(x)$ là hai đa thức không đồng thời bằng không. Đa thức $d(x)$ được gọi là *ước chung lớn nhất* của nếu

i. $d(x)$ là ước chung của $f(x)$ và $g(x)$,

ii. Nếu $c(x) \mid f(x) \vee c(x) \mid g(x)$ thì $c(x) \mid d(x)$.

Kí hiệu $d(x) = \text{UCLN}(f(x), g(x))$ hay: $d(x) = (f(x), g(x))$.

Ví dụ: $x - 1 = (x^2 - 5x + 4, x^3 + 4x - 5)$.

Nhận xét. Nếu $d(x)$ và $c(x)$ là hai ƯCLN của $f(x)$ và $g(x)$ thì $c(x) = ad(x)$ với $a \neq 0$.

6.2. Thuật toán Ôclit tìm ƯCLN.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức, $g(x) \neq 0$.

*) Nếu $f(x) \vdots g(x)$ thì $g(x) = (f(x), g(x))$.

*) Nếu trái lại ta thực hiện các bước

(1) Lấy $f(x)$ chia cho $g(x)$ ta được :

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \text{ bậc } r_1(x) < \text{bậc } g(x);$$

(2) Lấy $g(x)$ chia cho $r_1(x)$ ta được :

$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \text{ bậc } r_2(x) < \text{bậc } r_1(x);$$

(3) Lấy $r_1(x)$ chia cho $r_2(x)$ ta được :

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \text{ bậc } r_3(x) < \text{bậc } r_2(x);$$

.....Tiếp tục làm như trên ta thấy quá trình phải dừng lại ở một bước thứ $k+1$ nào đó (do bậc $r_i(x)$ giảm dần và bậc $g(x)$ là hữu hạn), tức là

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x).$$

Khi đó ta có $r_k(x) = (f(x), g(x))$.

Ví dụ. Dùng thuật toán Ôclit tìm ƯCLN $(x^3 - 2x + 1, x^2 - 3x + 2)$.

Ta có $x^3 - 2x + 1 = (x^2 - 3x + 2)(x + 3) + (5x - 5)$

$$x^2 - 3x + 2 = (5x - 5)\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}\right)$$

Vậy $(5x - 5) = (x^3 - 2x + 1, x^2 - 3x + 2)$ hay cũng có $(x - 1)$ là ước chung lớn nhất của hai đa thức $x^3 - 2x + 1$ và $x^2 - 3x + 2$.

6.3. Mệnh đề. Nếu $d(x) = (f(x), g(x))$ thì tồn tại hai đa thức $u(x)$ và $v(x)$ sao cho:

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x).$$

Chứng minh. Trở lại mục 6.2, ta thấy $d(x) = r_k(x)$ và từ đẳng thức (k) suy ra:

$$d(x) = r_k(x) = r_{k-2}(x) - r_{k-1}(x)q_k(x).$$

Nhờ đẳng thức (k-1), ta có:

$$r_{k-1}(x) = r_{k-3}(x) - r_{k-2}(x)q_{k-1}(x).$$

Do đó

$$\begin{aligned} d(x) &= r_k(x) = r_{k-2}(x) - r_{k-1}(x)q_k(x) = r_{k-2}(x) - [r_{k-3}(x) - r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)]q_k(x) = \\ &= r_{k-3}(x)q_k(x) + [1 + q_{k-1}(x)q_k(x)]r_{k-2}(x). \end{aligned}$$

Cứ tiếp tục như thế $r_{k-3}(x)$ và $r_{k-2}(x)$ được thay bởi $r_{k-4}(x)$ và $r_{k-3}(x)$. Cuối cùng $r_1(x)$ và $r_2(x)$ được thay bởi $f(x)$, $g(x)$ và ta được hai đa thức $u(x)$ và $v(x)$ cần tìm.

6.5. Định nghĩa. Hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là *nguyên tố cùng nhau* nếu ƯCLN của chúng là 1.

6.6. Hệ quả. Hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi tồn tại hai đa thức $u(x)$ và $v(x)$ sao cho $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$.

7. Đa thức bất khả quy

7.1. Định nghĩa. Cho trường K , $f(x) \in K[x]$.

i. Nếu $f(x) = g(x)h(x)$ và bậc $g(x) \geq 1$, bậc $h(x) \geq 1$ thì $g(x)$ và $h(x)$ gọi là những ước thực sự của $f(x)$.

ii. Nếu bậc $f(x) \geq 1$ và $f(x)$ không có ước thực sự nào thì $f(x)$ được gọi là *đa thức bất khả quy*.

Ví dụ

1. Giả sử K là một trường tùy ý, mọi đa thức $ax + b \in K[x]$, $a \neq 0$ đều là đa thức bất khả quy. Thật vậy, vì $a \neq 0$ nên bậc $(ax + b) = 1$. Nếu có hai đa thức $g(x), h(x)$ sao cho $ax + b = g(x)h(x)$ thì:

$$1 = \text{bậc}(ax + b) = \text{bậc}(g(x)h(x)) = \text{bậc } g(x) + \text{bậc } h(x).$$

Do đó hoặc bậc $g(x) = 1$, bậc $h(x) = 0$ hoặc bậc $g(x) = 0$ và bậc $h(x) = 1$, nghĩa là đa thức $ax + b$ không có ước thực sự.

2. Trong vành $\mathbb{C}[x]$ với $\mathbb{C}$ là trường số phức, đa thức $f(x)$ là bất khả quy khi và chỉ khi nó có dạng $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$.

3. Trong vành $\mathbb{R}[x]$ với $\mathbb{R}$ là trường số thực, đa thức $f(x)$ là bất khả quy khi $f(x)$ có dạng $ax + b$, $a \neq 0$ hoặc $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Ngược lại mọi đa thức $f(x)$ có dạng $ax + b$, $a \neq 0$ hoặc $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ là bất khả quy trong $\mathbb{R}[x]$.

Trong vành $\mathbb{Q}[x]$ với $\mathbb{Q}$ là trường số hữu tỉ, việc thiết lập một tiêu chuẩn để một đa thức là bất khả quy khá phức tạp. Trước hết ta hãy nhận xét rằng, mọi đa thức

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_ix^i + \dots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{Q}$$

bằng cách quy đồng mẫu số của các a_i , đều viết được dưới dạng:

$$f(x) = \frac{a}{b}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_ix^i + \dots + c_nx^n), c_i \in \mathbb{Z},$$

trong đó các hệ số $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ nguyên tố cùng nhau.

Đặt: $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_ix^i + \dots + c_nx^n, c_i \in \mathbb{Z}$ người ta chứng minh được bổ đề sau đây:

Bổ đề. Giả sử $f(x) \in \mathbb{Q}(x), f(x) = \frac{a}{b}g(x)$, trong đó

$$g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_ix^i + \dots + c_nx^n, c_i \in \mathbb{Z}$$

Khi đó $f(x)$ là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$ nếu và chỉ nếu $g(x)$ là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

7.2. Tiêu chuẩn Aidenstainơ

Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Nếu có một số nguyên tố p sao cho

i. $p \nmid a_n$;

ii. $p \mid a_i, i = 0, n-1$;

iii. $p^2 \nmid a_0$.

thì $f(x)$ là đa thức bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

Ví dụ. $f(x) = 2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 3$ là đa thức bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$, vì $p = 3$ thỏa mãn tiêu chuẩn.

Chú ý: Tiêu chuẩn này chỉ là một điều kiện đủ để một đa thức với hệ số nguyên là bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$. Chẳng hạn, các đa thức $x^2 + 1, x^2 - x + 3$ tuy không thỏa mãn tiêu chuẩn Aidenstainơ nhưng vẫn bất khả quy trong $\mathbb{Q}[x]$.

8. Phân tích đa thức thành nhân tử

Ta có $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = (x-1)(x+1)(2x-5)$,

$$f(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-1)(x+1) \text{ với } f(x) \in \mathbb{Q}[x].$$

Các đa thức $x-1, x+1, x-\frac{5}{2}$ là các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$.

Như vậy đa thức $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$ được viết thành tích của các đa thức bất khả quy.

Giả sử $p(x)$ là đa thức bất khả quy. Nếu $p(x) \mid f(x)g(x)$ thì $p(x) \mid f(x)$ hoặc $p(x) \mid g(x)$.

Định lý. Giả sử K là một trường. Mỗi đa thức $f(x) \in K[x]$ có bậc $n \geq 1$ đều có thể phân tích thành tích của những đa thức bất khả quy. Và sự phân tích là duy nhất sai khác một hằng số.

Nhận xét.

1. Trên trường số phức $\mathbb{C}$, mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ bậc $n \geq 1$ đều phân tích được thành tích của những nhị thức bậc nhất.

2. Trên trường số thực $\mathbb{R}$, mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc $n \geq 1$ đều phân tích được thành tích của những nhị thức bậc nhất và tam thức bậc 2 dạng $ax^2 + bx + c$ với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

9. Nghiệm hữu tỉ của đa thức hệ số nguyên

9.1. Định lí. Nếu $\alpha \in \mathbb{Q}$ là nghiệm của đa thức

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

thì α là một số nguyên và $\alpha \mid a_0$.

Chứng minh. Giả sử $\alpha = \frac{p}{q}$ là nghiệm của $f(x)$, trong đó $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Khi đó

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

hay :

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow p(p^{n-1} + a_{n-1}qp^{n-2} + \dots + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n$$

$$\Rightarrow a_0q^n \vdots p$$

Vì $(p, q) = 1$ nên $a_0 \vdots p$.

Từ (1) ta cũng có $q(a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0q^{n-1}) = -p^n$

suy ra $p^n \vdots q$, mà $(p, q) = 1$ nên ta có $q = 1$. Vậy $\alpha = p$ là ước của a_0 .

9.2. Mệnh đề. Giả sử

$f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0, a_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{0, n-1}, a \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ và $y = ax$. Khi đó $a^{n-1}f(x)$ là một đa thức ẩn y với hệ số cao nhất bằng 1.

$$a^{n-1}f(x) = h(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1a^{n-2}y + a_0a^{n-1}.$$

Hơn nữa α là một nghiệm hữu tỉ của đa thức $f(x)$ khi và chỉ khi $a\alpha$ là một nghiệm của $h(y)$.

Chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} h(y) &= y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1a^{n-2}y + a_0a^{n-1} \\ &= (ax)^n + a_{n-1}(ax)^{n-1} + \dots + a_1a^{n-2}(ax) + a_0a^{n-1} \\ &= a^{n-1}(ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) = a^{n-1}f(x). \end{aligned}$$

Khi đó $x = \alpha$ là nghiệm của đa thức $f(x)$ khi và chỉ khi $f(\alpha) = 0$ hay $a^{n-1}f(\alpha) = 0$.

Mặt khác $a^{n-1}f(x) = h(y)$. Do đó α là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi:

$$h(a\alpha) = (a\alpha)^n + a_{n-1}(a\alpha)^{n-1} + \dots + a_0a^{n-1} = 0,$$

tức là khi và chỉ khi $a\alpha$ là một nghiệm của $h(y)$.

9.3. Cách tìm nghiệm hữu tỉ của đa thức với hệ số nguyên

Chú ý. Chỉ cần xét đa thức với hệ số bậc cao nhất là 1

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

Theo mệnh đề trên thì mỗi nghiệm hữu tỉ của đa thức là một ước của a_0 . Do đó để tìm nghiệm của đa thức ta chỉ cần kiểm nghiệm các ước của a_0 .

Ví dụ: Tìm nghiệm hữu tỉ của đa thức

$$a. f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$$

$$b. g(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 12$$

Giải. a. Nghiệm của $f(x)$ nằm trong tập hợp các ước của 14, đó là

$$\{-1, 1, -2, 2, -7, 7, -14, 14\}.$$

Ta có $f(1) = -4 \neq 0$, $f(-1) = -36 \neq 0$, $f(2) = 0$, như vậy 2 là một nghiệm của $f(x)$.

Tiếp tục thử như trên ta sẽ tìm được tất cả các nghiệm của $f(x)$. Trong trường hợp này đa thức chỉ có nghiệm là 2.

b. Ta có $g(1) = 6 \neq 0$, $g(-1) = 4 \neq 0$. Vậy 1 và -1 không là nghiệm của đa thức.

Nếu α là nghiệm của đa thức thì α phải thỏa mãn :

$$\alpha \mid 12, (1-\alpha) \mid g(1) = 6 \text{ và } (1+\alpha) \mid g(-1) = 4.$$

Ta có bảng sau :

α	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-6	6	-12	12
$1-\alpha$	2	0	3	-1	4	-2	5	-3	7	-5	13	-11
$1+\alpha$	0	2	-1	3	-2	4	-3	5	-5	7	-11	13

Từ bảng trên ta thấy chỉ cần thử với các giá trị -2 và 4.

Ta có $g(-2) = 0$, $g(4) = 84$. Vậy đa thức chỉ có nghiệm hữu tỉ là -2.

Chú ý.

1. Nếu α là một nghiệm của $f(x)$ thì $f(x) = (x-\alpha)g(x)$

Do đó $f(1) = (1-\alpha)g(1)$, trong đó $g(1) \in \mathbb{Z}$, nên $(1-\alpha) \mid f(1)$. Tương tự $(1+\alpha) \mid f(-1)$.

Như vậy ta chỉ cần thử các ước của a_0 thỏa mãn $(1-\alpha) \mid f(1)$ và $(1+\alpha) \mid f(-1)$.

2. Khi đã tìm được một nghiệm hữu tỉ của đa thức, ta có thể làm phép chia đa thức để tìm các nghiệm khác (không nhất thiết là nghiệm hữu tỉ).

Ví dụ: với đa thức $f(x)$ ở trên, khi tìm được 2 là nghiệm, thực hiện phép chia đa thức ta có

$$x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = (x-2)(x^2 - 4x + 7)$$

Như vậy $f(x)$ còn có 2 nghiệm phức $-2 \pm \sqrt{3}i$.

ỨNG DỤNG TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Trong chương trình Toán ở Tiểu học, học sinh được làm quen với ba dạng biểu thức

chứa chữ. Ta sẽ tìm hiểu một số bài tập

1. Một số bài tập trong chương trình SGK Tiểu học.

Bài 1.(Bài 2 – Toán 4 - trang 7) Tính giá trị biểu thức

a. $35+3 \times n$ với $n=7$

b. $168- m \times 5$ với $m=9$

c. $237- (66+x)$ với $x=34$

d. $37 \times (18:y)$ với $y=9$

Bài 2.(Bài 1 – Toán 4 – trang 42)Tính giá trị của $c + d$ nếu

a. $c = 10$ và $d = 25$

b. $c = 15\text{cm}$ và $d = 45\text{ cm}$

Bài 3 . (Bài 5 – Toán 4 - trang 46). Một hình chữ nhật có chiều dài là a , chiều rộng là b . Gọi P là chu vi của hình chữ nhật. Ta có công thức tính chu vi hình chữ nhật là $P = (a + b) \times 2$ (a, b cùng đơn vị đo). Áp dụng công thức trên để tính chu vi hình chữ nhật biết:

a. $a = 16\text{ cm}, b = 12\text{ cm}$

b. $a = 45\text{m}, b = 15\text{m}$

Bài 4. (Bài 2 - Toán 4 - trang 44). $a \times b \times c$ là biểu thức có chứa 3 chữ . Tính giá trị của biểu thức $a \times b \times c$ nếu

a. $a = 9, b = 5$ và $c = 2$

b. $a = 15, b = 0$ và $c = 37$.

Bài 5. (Bài 5 – Toán 4 - trang 75). Một hình vuông có cạnh a . Gọi S là diện tích của hình vuông .

a. Viết công thức tính diện tích của hình vuông đó.

b. Tính diện tích của hình vuông khi $a = 25\text{ m}$.

2. Bài tập nâng cao

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức với $a = 1; b = 0$

a. $A = (1993 : a + 1993 \times a) + 1994 \times b$

b. $B = b : (119 \times a + 5307) + (563 : a - b)$

c. $C = (100 + b) : (100 - b) - a + 100 \times a - 100 : b + b$

Bài 2. Tìm giá trị số tự nhiên của a để biểu thức sau có giá trị lớn nhất, giá trị lớn nhất

đó là bao nhiêu?

$$B = 1990 + 720 : (a - 6)$$

Bài 3. Tìm giá trị số của biểu thức sau:

$$A = a + a + a + a + \dots + a - 99 \text{ (có 99 số } a \text{)}$$

với $a = 1001$.

BÀI TẬP

Bài 1. Dùng thuật toán Ôclit tìm UCLN của hai đa thức

a) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ và $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$

b) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ và $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$

Bài 2. Dùng tiêu chuẩn Aidenstainơ chứng minh rằng các đa thức sau bất khả quy :

a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2,$

c) $3x^5 - 4x^2 + 6x + 2,$

b) $2x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 3,$

d) $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 3x + 12,$

Bài 3. Chứng minh đa thức $f(x) = x^5 + 5x^2 + 20x - 4$ bất khả quy.

Bài 4. Chứng minh đa thức $f(x) = x^5 + 5x^2 + 20x - 4$ bất khả quy.

Gợi ý. Đặt $x = y - 1$, khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y-1) = (y-1)^5 + 5(y-1)^2 + 20(y-1) - 4 \\ &= y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 5y^2 + 15y - 20 \end{aligned}$$

Áp dụng tiêu chuẩn Aidenstainơ với $p = 5$.

Bài 6. Cho đa thức $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Chứng minh rằng:

- $p(x)$ là đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Q}[x]$,
- $\sqrt{2}$ là nghiệm của $x^2 - 2$,
- $\sqrt{2}$ cũng là nghiệm của $x^4 + 6x^2 - 16$,
- $x^4 + 6x^2 - 16$ chia hết cho $x^2 - 2$.
- Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nhận $\sqrt{2}$ là nghiệm đều chia hết cho $x^2 - 2$.

Bài 7. Tìm nghiệm hữu tỉ của các đa thức sau:

- | | |
|---|--|
| a. $x^4 - x^3 - 8x^2 + 2x + 12$, | d. $3x^4 - 4x^3 - x^2 - 4x - 4$, |
| b. $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4$, | e. $12x^4 + 2x^3 - 8x^2 - x - 1$, |
| c. $2x^3 + x^2 - 11x - 6$, | f. $12x^5 + x^4 - x^3 + 12x^2 + x - 1$. |

PHƯƠNG TRÌNH . BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1: ĐẲNG THỨC. BẤT ĐẲNG THỨC

I. MỤC TIÊU.

1. Kiến thức

Giúp người học nắm vững

- Một số khái niệm đẳng thức, bất đẳng thức
- Một số phương pháp chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.
- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các dạng toán dùng phương trình và bất phương trình ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.
- Giải các bài toán Tiểu học có liên quan tới đẳng thức, bất đẳng thức theo ngôn ngữ Toán ở Tiểu học.

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung .
- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Khái niệm đẳng thức

Trong toán học ta đã dùng dấu " $=$ " ở rất nhiều trường hợp để *chỉ sự bằng nhau* của hai đối tượng nào đó. Ở mỗi trường hợp, *sự bằng nhau* đều phải được định nghĩa chính xác. Chẳng hạn :

Đẳng thức $7 - 5 + 8 = 10$ được định nghĩa bởi các quy tắc cộng và trừ các số.

Với hai số tùy ý a và b ta có đẳng thức $a + b = b + a$. Đây là tính chất giao hoán của phép cộng.

Như vậy, trong mỗi trường hợp trên dấu " $=$ " có một ý nghĩa xác định riêng. Và $7 - 5 + 8 = 10$, $a + b = b + a$ được gọi là các đẳng thức.

1.1. Định nghĩa. Hai biểu thức liên hệ với nhau bởi một dấu " $=$ " (dấu bằng) gọi là đẳng thức.

1.2. Hằng đẳng thức. Phép biến đổi đồng nhất

a) Định nghĩa. Cho hai biểu thức chứa biến $F(x, y, \dots, z)$, $G(x, y, \dots, z)$. Ta nói :

$$F(x, y, \dots, z) = G(x, y, \dots, z)$$

là một hằng đẳng thức nếu với mọi bộ các số $(x_0, y_0, \dots, z_0)$ làm cho hai biểu thức có nghĩa, ta có :

$$F(x_0, y_0, \dots, z_0) = G(x_0, y_0, \dots, z_0)$$

Ví dụ: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ là hằng đẳng thức.

b) Định nghĩa. Cho hai biểu thức chứa biến $F(x, y, \dots, z)$, $G(x, y, \dots, z)$ với các tập xác định tương ứng là D_1, D_2 . Ta nói $F(x, y, \dots, z)$ đồng nhất bằng $G(x, y, \dots, z)$ trên tập $D = D_1 \cap D_2$ nếu với mọi bộ các số $(x_0, y_0, \dots, z_0) \in D$ ta có

$$F(x_0, y_0, \dots, z_0) = G(x_0, y_0, \dots, z_0)$$

Ví dụ.

+) Hiển nhiên hai vế của hằng đẳng thức là hai biểu thức bằng nhau.

+) $F(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$ có tập xác định là $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq \pm y\}$

$G(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ có tập xác định là $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y\}$

là hai biểu thức đồng nhất bằng nhau trên tập

$$D = D_1 \cap D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq \pm y\} = D_1.$$

c) Định nghĩa. Phép biến đổi một biểu thức này thành một biểu thức khác đồng nhất với nó được gọi là phép biến đổi đồng nhất.

Ví dụ.
$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x + y)^2}{(x + y)(x - y)} = \frac{x + y}{x - y}$$

Ta đã thực hiện hai phép biến đổi đồng nhất để biến biểu thức đầu tiên thành biểu thức cuối cùng.

d) Phương pháp hệ số bất định

Phương pháp: Khi muốn biểu diễn một đa thức hay một phân thức đại số dưới một dạng xác định nào đó ta có thể coi các hệ số trong biểu diễn mới như những ẩn số rồi nhờ định nghĩa hai đa thức bằng nhau để xác định các hệ số cần thiết.

Ví dụ: Phân tích đa thức sau thành nhân tử:

$$x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2$$

Giải: Vì đa thức bậc 4 nên trước hết ta hãy phân tích đa thức trên thành tích của hai đa thức bậc 2 :

$$x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Ta sẽ tìm các ẩn a, b, c, d .

Khai triển vế phải ta được

$$x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (bc + ad)x + bd$$

Theo định nghĩa : hai đa thức bằng nhau khi và chỉ khi các hệ số tương ứng bằng nhau nên :

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ b + d + ac = -1 \\ bc + ad = 2 \\ bd = -2 \end{cases}$$

Chẳng hạn thử với $a = 0$, ta có $c = -1, b = -2, d = 1$. Thay các giá trị vào biểu thức ta có

$$x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x^2 - 2)(x^2 - x + 1) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 - x + 1)$$

2. Bất đẳng thức

2.1. Định nghĩa. Hai biểu thức liên hệ với nhau bởi dấu " $<$ " hoặc " $>$ " (hoặc " $\leq$ ", " $\geq$ ") được gọi là một bất đẳng thức.

Ví dụ : $3 < 5, |a| \geq a, x^2 + 1 > 0$ là các bất đẳng thức.

2.2. Một số bất đẳng thức quan trọng

2.2.1. Bổ đề. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số dương và $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ thì $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Ta có đẳng thức khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 1$, theo giả thiết $a_1 = 1$. Vậy mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với n , ta phải chứng minh mệnh đề đúng với $n + 1$.

Nếu $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1} = 1$ thì $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = n + 1$, tức là mệnh đề đúng.

Nếu có $a_i < 1$ thì $a_1 a_2 \dots a_{n+1} = 1$ nên tồn tại $a_j > 1$. Không làm mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $a_n < 1$ và $a_{n+1} > 1$. Đặt $a = a_n a_{n+1}$, ta có: $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a = 1$.

Vì tích này chỉ có n thừa số nên theo giả thiết quy nạp

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a \geq n.$$

Nhưng vì $a_n < 1$ và $a_{n+1} > 1$, nên $1 - a_n > 0$ và $a_{n+1} - 1 > 0$. Do đó

$$0 < (1 - a_n)(a_{n+1} - 1) = a_{n+1} + a_n - a_n a_{n+1} - 1.$$

Suy ra $a_{n+1} + a_n > a_n a_{n+1} + 1$.

Vậy: $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n a_{n+1} > a_1 + a_2 + \dots + a_n a_{n+1} + 1 \geq n + 1$.

Những lập luận trên cũng chứng minh rằng ta có đẳng thức khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

2.2.2. Bất đẳng thức Côsi (Cauchy)

Định lí. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số không âm thì

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Chứng minh. Nếu có một $a_i = 0$ thì bất đẳng thức đúng.

Nếu mọi $a_i \neq 0$, ta đặt $c = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Khi đó $\frac{a_1}{c} \cdot \frac{a_2}{c} \dots \frac{a_n}{c} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{c^n} = 1$.

Từ bổ đề trên suy ra: $\frac{a_1}{c} + \frac{a_2}{c} + \dots + \frac{a_n}{c} \geq n$ hay $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq c = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Ta đi chứng minh điều khẳng định thứ hai.

Đặt $c = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Nếu $c = 0$ thì theo bổ đề vì $a_i \geq 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ nên $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Nếu $c \neq 0$ thì theo bổ đề $\frac{a_1}{c} + \frac{a_2}{c} + \dots + \frac{a_n}{c} = n$ khi và chỉ khi $\frac{a_1}{c} = \frac{a_2}{c} = \dots = \frac{a_n}{c}$.

Vậy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Hệ quả 1. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số không âm và có tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ không đổi thì tích $P = a_1 a_2 \dots a_n$ có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Hệ quả 2. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số không âm và có tích $P = a_1 a_2 \dots a_n$ không đổi thì tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2.2.3. Bất đẳng thức Bunhiacopxki

Định lí. Với $2n$ số thực tùy ý

$$a_1, a_2, \dots, a_n; \quad b_1, b_2, \dots, b_n;$$

ta có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

2.2.4. Ví dụ

Chứng minh rằng: Nếu $a + b + c = 1$ thì $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 21$.

Giải. Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1})^2 &\leq (1+1+1)((4a+1) + (4b+1) + (4c+1)) \\ &= 3(4(a+b+c) + 3) = 21 \end{aligned}$$

Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{4a+1}}{1} = \frac{\sqrt{4b+1}}{1} = \frac{\sqrt{4c+1}}{1} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Ứng dụng của bất đẳng thức Cô – si trong Toán Tiểu học

Xét bài toán :

Bài toán ở Tiểu học:

Ngày xưa có một người nông dân đi ở cày ruộng cho một nhà địa chủ. Anh cày ruộng từ khi con trâu còn sung sức đến khi nó già yếu chết đi. Địa chủ gọi anh nông dân đến và nói: “Con trâu chết rồi ta sẽ không thuê anh nữa. Ta sẽ cắt ruộng để trả công anh. Anh hãy lấy miếng da con trâu kia mà khoanh thành mảnh ruộng vuông vức (tức là mảnh ruộng có các góc đều vuông), anh khoanh được bao nhiêu thì đó là ruộng của anh”. Người nông dân đã cắt miếng da trâu thành sợi dây dài và khoanh thành mảnh ruộng vuông vức”. Để có mảnh ruộng có diện tích lớn nhất, người nông dân phải khoanh thành hình gì?

Trường hợp $n = 2$: Với $a, b > 0$ ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Ta suy ra $(2(a+b))^2 \geq 16ab$. Đặt $2(a+b) = S, ab = P$ ta có $S^2 \geq 16P$.

+) Khi P không đổi thì S đạt giá trị lớn nhất khi $a = b$

Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

+) Khi S không đổi thì P đạt giá trị lớn nhất khi $a = b$

Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi lớn nhất.

BÀI TẬP

Bài 1. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^6 + 27$,

d) $x^4 - 4y^4$,

b) $x^4 + 3x^2 + 4$,

e) $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.

c) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$,

Bài 2: Xác định a và b để $x^3 + 5x^2 - 8x + a$ chia hết cho $x^2 + x + b$.

Bài 3 : Chứng minh các bất đẳng thức.

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \quad \forall a, b, c,$

b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3, \quad \forall a, b, c > 0,$

c) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9, \quad \forall a, b, c > 0,$

d) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(a+c) \geq 6abc, \quad \forall a, b, c > 0,$

e) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \quad \forall a, b, c > 0,$

f) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right)^2 \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{6}z^2.$

§2. PHƯƠNG TRÌNH

I. Mục tiêu

1. Kiến thức

Sau bài học, người học biết

+ Khái niệm phương trình, phương trình bậc nhất, bậc hai.

+ Các phương pháp giải phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc 3, phương trình nghiệm nguyên.

2. Kỹ năng

- Giải phương trình bậc nhất, bậc hai, phương trình nghiệm nguyên.

- Giải được bài toán bằng cách lập phương trình và từ đó giải được bằng ngôn ngữ ở Tiểu học.

- Vận dụng được kiến thức về phương trình bậc nhất ,bậc 2, phương trình nghiệm nguyên để giải các bài tập nâng cao trong chương trình Toán Tiểu học.
- Vận dụng được kiến thức đã học để ra đề bài tập, hướng dẫn học sinh giải bài toán.

3. Thái độ

- Tích cực tự học, tự nghiên cứu.
- Yêu thích môn học.
- Có ý thức rèn luyện để trở thành người giáo viên dạy giỏi Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Khái niệm phương trình

1.1. Định nghĩa. Cho hai biểu thức chứa biến $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Nếu phải tìm các bộ n số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sao cho các giá trị tương ứng của hai đẳng thức thỏa mãn đẳng thức $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thì ta nói ta có *phương trình*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là các *ẩn*.

Mỗi bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nói trên được gọi là một nghiệm. Tập nghiệm được kí hiệu là S .

Ví dụ

1. $2x + 1 = 5$ là một phương trình một ẩn ; $x = 1$ là nghiệm. Tập nghiệm $S = \{1\}$.

2. $2x + y = 1$ là phương trình hai ẩn ; các cặp số $(0,1), \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ là các nghiệm của phương trình.

Tập nghiệm $S = \{(c, 1 - 2c)\}$, trong đó c tùy ý.

1.2. Định nghĩa. Hai phương trình được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng một tập nghiệm. Kí hiệu " $\Leftrightarrow$ " để chỉ hai phương trình tương đương.

Ví dụ

1. $|x| = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ vì chúng có cùng tập nghiệm là $S = \{-2, 2\}$.

2. $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = x + 3$ trên trường số thực $\mathbb{R}$ vì chúng có cùng tập nghiệm là $S = \emptyset$.

Hai phương trình này không tương đương trên trường $\mathbb{C}$ vì phương trình thứ nhất có tập nghiệm $S_1 = \{-i, i\}$, phương trình thứ hai vô nghiệm.

2. Phương trình bậc nhất và bậc hai.

2.1. Định nghĩa

i. *Phương trình bậc nhất một ẩn* là phương trình có dạng : $ax + b = 0, a \neq 0$.

ii. *Phương trình bậc hai một ẩn* là phương trình có dạng :

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

2.2. Cách giải

2.2.1. Cách giải phương trình dạng $ax + b = 0$

Nếu $a \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $a = 0, b = 0$ thì mọi giá trị của x đều là nghiệm.

Ví dụ: $\frac{2x-3}{2} + \frac{2-3x}{4} = \frac{x}{4}$ (2).

Giải: Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 4x - 56 + 2 - 3x = x$$

$$\Leftrightarrow 0x - 4 = 0.$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

2.2.2. Cách giải phương trình dạng $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$, và gọi là biệt thức của phương trình, ta có $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

Nếu $\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm.

Nếu $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

3. Phương trình tích

3.1. Định nghĩa. Khi phải tìm hợp các tập nghiệm của m phương trình :

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (2)$$

.....

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (m)$$

thì ta nói ta có một tuyến m phương trình và kí hiệu

$$\left[\begin{array}{l} F_1(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ F_2(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ \\ F_n(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{array} \right.$$

3.2. Mệnh đề. Phương trình tích

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (I)$$

tương đương với tuyến

[illegible]

Chứng minh. Giả sử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ là một nghiệm của (I).

$$\Leftrightarrow F_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \dots F_i(a_1, a_2, \dots, a_n) \dots F_m(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow F_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ là nghiệm của phương trình } F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ là một nghiệm của tuyến (II).}$$

Ví dụ. Giải phương trình $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (1)$

Giải: Ta thấy phương trình có một nghiệm là 1 nên ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{1, -2, 3\}$.

4. Tìm nghiệm nguyên của phương trình bậc nhất hai ẩn

4.1. Định lí. Phương trình

$$ax + by = c ; a, b, c \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0 \quad (*)$$

có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $d = (a, b) \mid c$.

Nhận xét. Khi $(a, b) = 1$ thì (*) luôn có nghiệm nguyên.

4.2. Định lí. Nếu phương trình $ax + by = c ; a, b, c \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 > 0 \quad (1)$

Có một nghiệm là (x_0, y_0) thì nó sẽ có vô số nghiệm (x, y) có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases} \quad (2)$$

trong đó $d = (a, b)$.

Chứng minh. Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm của (1). Khi đó

$$a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right) = ax_0 + by_0 + \frac{ab}{d}t - \frac{ab}{d}t = ax_0 + by_0 = c.$$

Vậy cặp (x, y) thỏa mãn (2) là nghiệm của (1)

Ngược lại giả sử (x_1, y_1) cũng là một nghiệm của phương trình (1). Khi đó ta có

$$ax_1 + by_1 = c,$$

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Trừ hai vế của đẳng thức ta có

$$\begin{aligned}
a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) &= 0 \\
\Leftrightarrow a(x_1 - x_0) &= -b(y_1 - y_0) \\
\Leftrightarrow \frac{a}{d}(x_1 - x_0) &= -\frac{b}{d}(y_1 - y_0)
\end{aligned}$$

Do d là ước chung lớn nhất của a và b nên $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Khi đó $\frac{b}{d} \mid (x_1 - x_0)$, $\frac{a}{d} \mid (y_1 - y_0)$. Do đó $\frac{x_1 - x_0}{\frac{b}{d}} = t = \frac{y_1 - y_0}{-\frac{a}{d}}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Hay
$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{b}{d}t \\ y_1 = y_0 - \frac{a}{d}t \end{cases}$$

Ví dụ. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$4x + 6y = 14 \quad (1)$$

Giải: Ta có $(4, 6) = 2 \mid 14$ do đó (1) có nghiệm nguyên.

Dễ thấy $(2, 1)$ là một nghiệm của (1) nên các nghiệm của phương trình có dạng:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

4.3. Cách tìm nghiệm nguyên

Trường hợp không nhận ra ngay một nghiệm nguyên của phương trình ta có thể làm như sau:

Ví dụ. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$4x - 17y = -14 \quad (2)$$

Giải: Vì $(4, 17) = 1 \mid -14$ nên (2) luôn có nghiệm nguyên.

Từ (2) ta có

$$x = \frac{17y + 8}{4} = 4y - 3 + \frac{y - 2}{4}.$$

Vì ta cần tìm nghiệm nguyên nên $\frac{y - 2}{4}$ phải là số nguyên.

Đặt : $t = \frac{y - 2}{4}$ ($t \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow y = 4t + 2$, ta có: $x = 4(4t + 2) - 3 + t = 17t + 5$.

Vậy nghiệm nguyên của phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases} x = 17t + 5 \\ y = 4t + 2 \end{cases}$$

5. Một số phương trình bậc cao đặc biệt

5.1. Phương trình quy về phương trình bậc hai

Ví dụ. Giải phương trình

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=15 \quad (1)$$

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]=15$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+4)(x^2+4x+6)=15$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+5)^2-1=15$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+1)(x^2+4x+9)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \pm \sqrt{3}$$

Tổng quát cho bài Toán

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=S,$$

Trong đó a, b, c là cấp số cộng.

5.2. Phương trình hồi quy

$$ax^4+bx^3+cx^2 \pm kbx+ka^2=0 \quad (ka \neq 0) \quad (2)$$

Giải. Ta thấy $x=0$ không là nghiệm nên chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ ta có

$$(2) \Leftrightarrow ax^2+bx+c \pm k \frac{b}{x} + k^2 \frac{a}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a \left(x^2 + \frac{k^2}{x^2} \right) + b \left(x \pm \frac{k}{x} \right) + c = 0$$

Đặt $t = x \pm \frac{k}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{k^2}{x^2} = t^2 \pm 2k$. Phương trình trở thành

$$at^2+bt+c \mp 2ak=0$$

Giải phương trình bậc 2 đối với t , sau đó giải x theo t .

Ví dụ. Giải phương trình $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$.

THỰC HÀNH – SEMINAR

Tiết 1. Giải bài tập

Bài 1. Tìm m phương trình sau đây có nghiệm duy nhất: $mx^3-x-m+1=0$

Đáp án. Ta có

$$mx^3-x-m+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(mx^2+mx+m-1)=0$$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau

+) TH 1. Phương trình $f(x)=mx^2+mx+m-1$ (1) vô nghiệm.

Nếu $m=0$, (1) vô nghiệm.

Nếu $m \neq 0$, (1) vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta = m^2 - 4m(m-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{4}{3} \\ m < 0 \end{cases}$$

+) TH2. Phương trình (1) chỉ có nghiệm duy nhất là 1. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} (*)$$

Ta có (*) vô nghiệm nên trường hợp này không xảy ra.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \leq 0$ hoặc $m > \frac{4}{3}$.

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên dương của các phương trình.

a) $4x - 11y = 30,$

b) $12x + 7y = 26.$

Đáp án

a) $4x - 11y = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30+11y}{4} = 7 + 2y + \frac{3y+2}{4}$

Do x, y là số nguyên nên $\frac{3y+2}{4} = t, \quad t \in \mathbb{Z}$. Ta có

$$y = \frac{4t-2}{3} = t + \frac{t-2}{3} \text{ suy ra } \frac{t-2}{3} = k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ hay } t = 3k + 2.$$

Vậy $y = 4k + 2, \quad x = 13 + 11k$. Do x, y là các số nguyên dương nên ta có nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là

$$\begin{cases} y = 4k + 2 \\ x = 13 + 11k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0.$$

b) $12x + 7y = 26$. Do x, y là các số nguyên dương nên $0 < x \leq 2, 0 < y \leq 3$. Thử các trường

hợp ta có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bài 3. Một số bài toán cổ Việt Nam

a) Trăm trâu trăm cỏ
Con đứng ăn năm
Con nằm ăn ba
Lụ khụ trâu già
Ba con một bó
Hỏi mỗi loại mấy trâu.

Đáp án.

Gọi số trâu đứng là x , số trâu nằm là y , số trâu già là $z, x, y, z \in \mathbb{Z}^+$.

Theo bài ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{z}{3} = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 & (1) \\ 15x + 9y + z = 300 & (2) \end{cases}$$

Trừ (2) cho (1) ta có $14x + 8y = 200 \Leftrightarrow 7x + 4y = 100$ (*).

Từ (2) và giả thiết các số x, y, z là các số nguyên dương nên ta có

$$x < \frac{100}{7} \quad \text{suy ra } x \leq 6 \quad (**).$$

Đến đây ta có thể có nhiều cách :

C1. Từ (*) ta có $x:4$, kết hợp với (**) suy ra $x = 4$. Thay vào các phương trình còn lại ta được $y = 18, z = 78$.

C2. Thử các trường hợp của x (cách này phù hợp với học sinh Tiểu học hơn).

C3. Giải nghiệm phương trình (*) bằng cách giải phương trình nghiệm nguyên đã học.

Tiết 2 - Ứng dụng trong dạy học toán ở Tiểu học

Phương trình bậc nhất một ẩn được giới thiệu trong chương trình sách giáo khoa Toán Tiểu học dưới dạng các bài tìm thành phần chưa biết của phép toán. Ta tìm hiểu một số bài toán sau

1. Một số bài tập trong chương trình SGK Tiểu học

Bài 1. (Bài Toán 2)

Số ?

$$\begin{array}{lll} 6 + \square = 11 & \square + 6 = 12 & 6 + \square = 12 \\ 72 - \square = 72 & 2 + \square = 2 & \square + 2 = 5 \end{array}$$

Bài 2. (Bài 1 – Toán 2 - trang 45). Tìm x :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } x + 5 = 10 & \text{b. } x + 8 = 19 & \text{c. } 4 + x = 14 \end{array}$$

Bài 3. (Bài 1 – Toán 2 - tr 72). Tìm x :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } 15 - x = 10 & \text{b. } 42 - x = 5 & \text{c. } 32 - x = 18 \end{array}$$

Bài 4. (Bài 2 – Toán 2 - trang 116). Tìm x :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } x \times 2 = 10 & \text{b. } x \times 3 = 12 & \text{c. } 3 \times x = 21 \end{array}$$

Bài 5. (Bài 2 – Toán 2 - trang 129). Tìm x :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } x : 2 = 4 & \text{b. } x : 4 = 5 & \text{c. } x : 3 = 3 \end{array}$$

Bài 9. (Bài 2 - Toán 3- trang 39) Tìm x :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } 12 : x = 2 & \text{b. } 42 : x = 6 & \text{c. } 27 : x = 3 \\ \text{d. } 36 : x = 4 & \text{e. } x : 5 = 4 & \text{g. } x \times 7 = 70 \end{array}$$

2. Bài tập nâng cao vận dụng

Bài 1. Tìm x trong phép tính sau:

$$\begin{array}{l} x - 60 \times 5 = 3000 \\ (x - 60) \times 5 = 3000 \\ (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 10) = 65 \end{array}$$

Bài 2. Tìm y trong phép tính sau:

$$\begin{array}{ll} a) \frac{3}{5} + y = \frac{11}{15} & b) y - \frac{5}{7} = \frac{17}{13} \\ c) \frac{5}{7} \times y = \frac{4}{3} & d) y : \frac{4}{3} = \frac{7}{5} \end{array}$$

Bài 3. Tìm x biết :

$$a) x : 0,25 + x : 0,5 + x + x : 0,01 = 214$$

$$b) 17,75 - (0,5 \times x : 2 - 4,2) = 15$$

3. Ứng dụng bài toán giải phương trình bậc nhất một ẩn số

Bài 1. Tìm một số biết rằng khi bớt số đó đi 2, sau đó chia 6, được bao nhiêu cộng với 2, cuối cùng nhân với 4 được kết quả là 20.

Hướng dẫn: Gọi số phải tìm là x .

Khi bớt số đó đi 2 ta được số: $x - 2$.

Khi chia tiếp cho 6 ta được số: $(x - 2) : 6$.

Khi cộng với 2 ta được số: $(x - 2) : 6 + 2$.

Khi nhân với 4 ta được số: $[(x - 2) : 6 + 2] \times 4$.

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} [(x - 2) : 6 + 2] \times 4 &= 20 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Bài 3. Tìm một số, biết rằng khi nhân số đó với 5, rồi bớt đi 3 sau đó cộng với 4,5 cuối cùng chia cho 3 ta được kết quả bằng 5

4. Ứng dụng bài toán giải phương trình nghiệm nguyên dương

4.1. Bài toán đong chất lỏng

Ví dụ : Hai người mua chung nhau 12 lít sữa. Khi về nhà họ chia nhau nhưng dụng cụ chia chỉ có một chậu lớn, một can có dung tích 7 lít và một can có dung tích 5 lít. Hỏi làm thế nào để chia cho mỗi người 6 lít sữa.

Phân tích. Thực chất bài toán này chính là việc giải nghiệm nguyên dương của phương trình $7x + 5y = 6$. Giải phương trình này ta được nghiệm dạng

$$\begin{cases} x = 3 - 5k \\ y = -3 + 7k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó ta có các cặp nghiệm và ứng với mỗi cặp nghiệm ta có một cách chia, chẳng hạn với cặp nghiệm (3, -3) ta có cách chia như sau :

Đong 3 lần can 7 lít và đổ đầy sang can 5 lít 3 lần thì ta đong được 6 lít vì :

$$7 \times 3 - 5 \times 3 = 6(l).$$

Vậy ta có thể hướng dẫn học sinh Tiểu học cách thiết lập phương trình và giải bài toán với nhiều cách khác nhau. Chú ý trong Tiểu học chưa học số nguyên nên phải hướng dẫn học sinh thiết lập phương trình dạng

$$7x - 5y = 6 \quad \text{hoặc} \quad 5x - 7y = 6.$$

4.2. Phương pháp chặn trong các bài toán hệ phương trình nghiệm nguyên

Ví dụ : Trên hai chiếc xe có 12 người gồm đàn ông, đàn bà và trẻ con. Qua một ngôi làng, họ mua 12 ổ bánh mì và được chia như sau : Mỗi người đàn ông được hai ổ, mỗi người đàn bà được nửa ổ, mỗi trẻ em được $\frac{1}{4}$ ổ. Hỏi trên xe có bao nhiêu người đàn ông, đàn bà, trẻ em.(bài toán dân gian Bungari).

Giải. Gọi số đàn ông, đàn bà, trẻ em lần lượt là x, y, z . Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 8x + 2y + z = 48 \end{cases}$$

Giải tương tự bài trên ta có $x = 5, y = 1, z = 6$.

Phân tích. Đối với GV ta có các cách để phát triển lớp bài toán này như sau :

- +) Từ bài Toán này ta có thể đưa ra một lớp bài toán tương tự.
- +) Xuất phát từ hệ phương trình của bài Toán này, ta có thể ra các đề toán với lời văn khác.
- +) Từ một hệ phương trình (có nghiệm nguyên), đặt đề Toán tương ứng.

BÀI TẬP

Bài 1. Giải bài toán sau:

Em đi chợ phiên
Anh gửi một tiền,
Mua cam cùng quýt,
Vớ lại thanh yên,
Không nhiều thì ít,
Mua lấy một trăm,
Cam ba đồng một,
Quýt một đồng ba,
Thanh yên tươi tốt,
Năm đồng một trái,
Hỏi mỗi thứ mua được mấy trái?

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

- a, $15x + 13y = 20$;
- b, $4x - 17y = 8$;
- c, $11x + 9y = 20$;
- d, $9x - 15y = -12$;

Bài 3. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

- a, $4x - 11y = 30$;
- b, $12x + 7y = 26$;

§3: HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Mục tiêu

1. Kiến thức

Sau bài học, người học biết

+ Khái niệm hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

+ Các phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

2. Kỹ năng

- Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng nhiều cách.

- Giải được bài toán bằng cách lập hệ phương trình và từ đó giải được bằng ngôn ngữ ở Tiểu học.

- Vận dụng được kiến thức về hệ phương trình bậc nhất hai ẩn để giải các bài tập nâng cao trong chương trình Toán Tiểu học.

- Vận dụng được kiến thức đã học để ra đề bài tập, hướng dẫn học sinh giải bài toán.

3. Thái độ

- Tích cực tự học, tự nghiên cứu.

- Yêu thích môn học.

- Có ý thức rèn luyện để trở thành người giáo viên dạy giỏi Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Hệ phương trình tuyến tính hai ẩn

1.1. Định nghĩa. Nếu phải tìm nghiệm chung của hai phương trình bậc nhất (phương trình tuyến tính) hai ẩn

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_1^2 + b_1^2 > 0$$

$$a_2x + b_2y = c_2, \quad a_2^2 + b_2^2 > 0$$

thì ta nói có một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, kí hiệu :
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Một nghiệm của hệ này là một cặp số (x_0, y_0) thỏa mãn
$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = c_2 \end{cases}$$

Ví dụ. Hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 7y = -3 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases}$$
 có nghiệm là $(2, -1)$.

1.2. Cách giải

1.2.1. Phương pháp thế

Vì a_1, b_1 không đồng thời bằng 0 nên không làm mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $a_1 \neq 0$. Ta giải hệ phương trình bằng phương pháp thế. Trong đó ta sẽ rút ẩn x theo y trong phương trình thứ nhất và thay vào phương trình 2. Cụ thể trong ví dụ

Ví dụ. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.

$$\begin{cases} 2x + 7y = -3 & (1) \\ 5x - 3y = 13 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $x = \frac{-3-7y}{2}$. Thay vào phương trình (2) ta có:

$$\begin{aligned} 5 \frac{-3-7y}{2} - 3y &= 13 \\ \Leftrightarrow -41y &= 41 \\ \Leftrightarrow y &= -1 \end{aligned}$$

Khi đó ta có $x = 2$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(2, -1)$.

1.2.2. Phương pháp khử

Ví dụ: Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} 2x + 7y = -3 & (1) \\ 5x - 3y = 13 & (2) \end{cases}$

Giải. Nhân (1) với 5, nhân (2) với 2 ta có

$$\begin{cases} 2x + 7y = -3 \\ 5x - 3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 35y = -15 \\ 10x - 6y = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 7y = -3 \\ 41y = -41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

1.2.3. Phương pháp dùng định thức cấp hai.

Định nghĩa. Định thức cấp hai của bảng bốn số $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ được xác định bởi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Áp dụng định thức để giải hệ phương trình tuyến tính hai ẩn

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 & (1) \\ a_2 x + b_2 y = c_2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Đặt : } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ta có kết luận

Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$$

Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ vô định.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 7y = -3 & (1) \\ 5x - 3y = 13 & (2) \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 5 \cdot 7 = -41,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 13 \cdot 7 = -82,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 2 \cdot 13 - (-3) \cdot 5 = 41.$$

Vì $D \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \frac{-82}{-41} = 2 \\ y = \frac{41}{-41} = -1 \end{cases}$$

2. Hệ phương trình tuyến tính ba ẩn

2.1. Định nghĩa. Một phương trình bậc nhất (hay tuyến tính) ba ẩn là phương trình có dạng $ax + by + cz = d$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

2.2. Cách giải

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 & (1) \\ 2x - 3y + 2z = -4 & (2) \\ y + 3z = 1 & (3) \end{cases}$$

Giải.

- Khử ẩn x từ phương trình (1) và (2) ta có hệ

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 & (1) \\ -5y - 2z = -2 & (4) \\ y + 3z = 1 & (3) \end{cases}$$

- Khử ẩn y từ phương trình (4) và (3) ta có

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 & (1) \\ y + 3z = 1 & (3) \\ 13z = 3 & (5) \end{cases}$$

Từ (5) ta có $z = \frac{3}{13}$, thay vào (3) ta có $y = \frac{4}{13}$

Thay vào phương trình (1) ta có $x = \frac{-23}{13}$.

3. Một số hệ phương trình đặc biệt

3.1. Hệ phương trình đối xứng

Định nghĩa. Hệ phương trình đối xứng loại II đối với ẩn x, y là hệ nếu tráo đổi vai trò của x và y thì phương trình này chuyển thành phương trình kia.

Cách giải. Đối với hệ này khi trừ từng vế của hai phương trình ta được một nghiệm là $x = y$.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x \\ 2y^2 + xy = 3y \end{cases}$$

Giải. Ta có

Trừ từng vế của hai phương trình ta có

$$\begin{aligned} 2(x^2 - y^2) &= 3(x - y) \\ \Leftrightarrow (x - y)(2x + 2y - 3) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Nếu $x = y$, thay vào một phương trình trong hệ ta có

$$3x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Nếu $(2x + 2y - 3) = 0 \Rightarrow x = \frac{3 - 2y}{2}$. Thay vào hệ

$$2y^2 + \frac{3 - 2y}{2}y = 3y \Leftrightarrow 2x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm

$$(0, 0), (1, 1), \left(0, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

3.2. Hệ phương trình đẳng cấp

Định nghĩa. Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai có dạng

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$$

Cách giải. Khử số hạng tự do để đưa về phương trình $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$.

Đặt $x = ty$. Thay vào hệ phương trình được phương trình bậc hai với t , giải t và thay vào tìm x, y .

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 15 & (1) \\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 & (2) \end{cases}$$

Giải. Khử số tự do ta có $x^2 + 9xy - 22y^2 = 0$. Đặt $x = ty$, ta có

$$y^2(t^2 + 9t - 22) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ t = 2 \\ t = -11 \end{cases}$$

+) $y = 0$, hệ vô nghiệm.

+) $t = 2$ suy ra $x = 2y$. Thay vào hệ ta có

$$y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

+) $t = -11$ suy ra $x = -11y$. Thay vào hệ ta có

$$y^2 = \frac{1}{14} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow x = \frac{-11}{\sqrt{14}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow x = \frac{11}{\sqrt{14}} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 cặp nghiệm.

ỨNG DỤNG TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Bài 1. Giải hệ phương trình bằng nhiều cách.

$$\begin{cases} 8x + 6y = 52 \\ 4x + 9y = 38 \end{cases}$$

Đáp án:

C1. Dùng phương pháp khử

$$\begin{cases} 8x + 6y = 52 \\ 4x + 9y = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 26 \\ 4x + 9y = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 12 \\ 4x + 9y = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

C2. Dùng phương pháp thế

$$\begin{cases} 8x + 6y = 52 \\ 4x + 9y = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y = 52 \\ x = \frac{38 - 9y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(38 - 9y) = 52 \\ x = \frac{38 - 9y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

C2. Dùng định thức cấp hai

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 48, \quad D_x = \begin{vmatrix} 52 & 6 \\ 38 & 9 \end{vmatrix} = 240, \quad D_y = \begin{vmatrix} 8 & 52 \\ 4 & 38 \end{vmatrix} = 96$$

$$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{240}{48} = 5, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{96}{48} = 2$$

Do bài Toán có các hệ số nguyên và có nghiệm nguyên dương nên ta có thể dựa vào bài toán để ra một đề Toán Tiểu học.

Ví dụ: Cô Hoa mua 8 quyển sách giáo khoa và 6 quyển vở hết 52 000 đồng. Cô Lan mua 4 quyển sách giáo khoa và 9 quyển vở cùng loại hết 38 000 đồng. Hãy tính giá tiền mỗi quyển sách giáo khoa và mỗi quyển vở.

Ta có thể biến đổi cách giải bằng phương pháp khử qua ngôn ngữ Tiểu học như sau
Giải.

Cô Hoa mua 8 quyển sách giáo khoa và 6 quyển vở hết 52 000 đồng. Do đó cô Hoa mua 4 quyển sách giáo khoa và 3 quyển vở hết số tiền là

$$52\,000 : 2 = 26\,000 \text{ (đồng)}$$

Vì hai người mua số sách giáo khoa bằng nhau (4 quyển) nên số tiền mua 9 quyển vở nhiều hơn số tiền mua 3 quyển vở là:

$$38\,000 - 26\,000 = 12\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy giá tiền một quyển vở là:

$$12\,000 : (9-3) = 2\,000 \text{ (đồng)}$$

Cô Lan mua 9 quyển vở hết số tiền là:

$$2\,000 \times 9 = 18\,000 \text{ (đồng)}$$

Giá tiền 4 quyển sách giáo khoa là

$$38\,000 - 18\,000 = 20\,000 \text{ (đồng)}$$

Giá tiền 1 quyển sách giáo khoa là

$$20\,000 : 4 = 5\,000 \text{ (đồng)}.$$

Bài 2. Một tổ thợ buổi sáng lắp một đoạn đường ống nước dài 44m hết 4 ống loại 1 và 3 ống loại 2. Buổi chiều lắp đoạn đường ống nước dài 73m hết 5 ống loại 1 và 6 ống loại 2. Hỏi độ dài một ống mỗi loại?

Nếu giải bài toán theo cách đặt hệ và giải ta có

Gọi độ dài ống loại 1 là x (m), loại 2 là y (m)

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x + 3y = 44 \\ 5x + 6y = 73 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y = 88 \\ 5x + 6y = 73 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 44 \\ 3x = 15 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Phân tích : Đối với học sinh Tiểu học ta không thể làm như thế này được. Ta phải biến đổi ngôn ngữ ‘Đại số’ sang ngôn ngữ ‘Số học’.

Bài toán có thể tóm tắt như sau :

4 ống loại 1 và 3 ống loại 2 dài 44m,

5 ống loại 1 và 6 ống loại 2 dài 73m.

Bây giờ giả sử số ống mỗi loại của buổi sáng tăng lên gấp đôi thì ta có

8 ống loại 1 và 6 ống loại 2 dài 88m,

5 ống loại 1 và 6 ống loại 2 dài 73m.

Ta thấy số ống loại 2 là như nhau.

Số ống loại 1 trong buổi sáng nhiều hơn buổi chiều là 3.

Độ dài ống buổi sáng dài hơn buổi chiều là 15m.

Lời giải

Ta giả sử số ống mỗi loại của buổi sáng tăng lên gấp đôi thì :

Số ống loại 1 dùng trong buổi sáng là:

$$4 \times 2 = 8 \text{ (ống)}.$$

Số ống loại 2 dùng trong buổi sáng là:

$$3 \times 2 = 6 \text{ (ống)}.$$

Chiều dài đường ống lắp buổi sáng là:

$$44 \times 2 = 88 \text{ (m)}.$$

Số ống loại 1 trong buổi sáng nhiều hơn buổi chiều là :

$$8 - 5 = 3 \text{ (ống)}$$

Độ dài ống buổi sáng dài hơn buổi chiều là :

$$88 - 73 = 15 \text{ (m)}.$$

Chiều dài ống loại 1 là:

$$15 : 3 = 5 \text{ (m)}.$$

Chiều dài 4 ống loại 1 là:

$$5 \times 4 = 20 \text{ (m)}.$$

Chiều dài 1 ống loại 2 là:

$$(44 - 20) : 3 = 8 \text{ (m)}.$$

BÀI TẬP

Một số bài toán giải bằng phương pháp khử

Bài 1. Một người mua lần 1, 5 quả cam và 10 quả quýt hết tất cả 5000 đồng. Lần 2 mua 1 quả cam và 1 quả quýt thì hết 700 đồng. Tính giá tiền 1 quả mỗi loại ?

Bài 2. Hôm trước Mai mua 3 lọ mực xanh và 2 lọ mực tím hết tất cả 4550 đồng. Hôm sau Mai lại mua 2 lọ mực xanh và 2 lọ mực tím như thế hết tất cả 4550 đồng. Tính giá tiền mỗi loại ?

Bài 3. Lớp 1A mua 10 quyển sách toán và một số quyển sách văn gấp 3 lần số quyển sách toán, hết tất cả 480000 đồng. Tổ 1 đông nhất mua $\frac{1}{2}$ số quyển sách toán và hết $\frac{1}{3}$ số quyển sách văn hết tất cả 175000 đồng. Tính giá tiền 1 quyển sách mỗi loại ?

Bài 4. Một người đi chợ mua 10 quả trứng gà và 5 quả trứng vịt hết tất cả 4700 đồng. Tính giá tiền mỗi loại trứng ? Biết rằng số tiền mua 5 quả trứng gà nhiều hơn 2 quả trứng vịt là 800 đồng.

Bài 5. Cả đàn trâu bò có tất cả 50 con. Biết rằng nếu đem $\frac{2}{5}$ số trâu và $\frac{3}{4}$ số bò gộp lại thì được 27 con. Hỏi có tất cả bao nhiêu con trâu, bao nhiêu con bò ?

Bài 6. Một người mua 5 gói kẹo và 2 gói bánh hết 26000 đồng. Một lần khác người ấy mua 2 gói kẹo và 9 gói bánh cùng loại hết 42000 đồng. Tính giá tiền 1 gói mỗi loại ?

Bài 7. Một tổ thợ buổi sáng lắp đặt 1 đoạn đường ống nước dài 44m hết 4 ống loại 1 và 3 ống loại 2. Buổi chiều tổ thợ đó lắp đặt đoạn đường ống dài 73 m hết 5 ống loại 1 và 6 ống loại 2. Tính độ dài 1 ống mỗi loại ?

Bài 8. Một cửa hàng may 12 bộ quần áo người lớn và 20 bộ quần áo trẻ em hết 108 m vải . Lần khác cửa hàng đó may 18 bộ quần áo người lớn và 15 bộ quần áo trẻ em cùng loại hết 117m vải . Tính số mét vải cần để may 1 bộ quần áo mỗi loại ?

Bài 9 . Giá tiền 1 ki-lô-gam đường và 1 gói bánh là 14000 đồng, 1 ki-lô-gam đường và 1 hộp sữa là 13000 đồng, 1 hộp sữa và 1 gói bánh là 11000 đồng. Tính giá tiền mỗi loại ?

Bài 10. Một người mua lần 1 là 5 quả chanh và quả hồng hết tất cả 25000 đồng. Mua lần 2 là 1 quả chanh và 1 quả hồng hết 35000 đồng. Tính giá tiền mỗi loại quả ?

§4: BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. MỤC TIÊU

1. Kiến thức

Giúp người học nắm vững

- Một số khái niệm bất phương trình, bất phương trình một ẩn, bất phương trình tuyến tính

- Một số phương pháp giải bất phương trình, phương pháp đồ thị.

- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các dạng toán dùng bất phương trình và bất phương trình ở Tiểu học.

2. Kỹ năng

- Giải các bất phương trình theo các cách

- Giải các bài toán thực tế có liên quan tới bất phương trình.

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung .

- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Khái niệm bất phương trình

1.1. Định nghĩa. Cho hai biểu thức chứa biến $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Nếu phải tìm các bộ n số $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho các giá trị tương ứng của hai biểu thức thỏa mãn $F(a_1, a_2, \dots, a_n) < G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ thì ta nói ta có *bất phương trình* :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) < G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Các biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là các *ẩn*.

Mỗi bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nói trên được gọi là một *ng nghiệm*. Tập nghiệm được kí hiệu là S .

Ta sẽ có các bất phương trình tương ứng với các dấu " $>$ ", " $\leq$ ", " $\geq$ ".

1.2. Định nghĩa. Hai bất phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm. Kí hiệu " $\Leftrightarrow$ " để chỉ hai bất phương trình tương đương.

Ví dụ.

1. $x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3$ trên tập các số thực $\mathbb{R}$ vì chúng có cùng tập nghiệm $S = (-3, 3)$.

2. $x^2 + y^2 < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 10y^2 < -3$ trên tập các số thực $\mathbb{R}$ vì chúng có cùng tập nghiệm $S = \emptyset$.

2. Bất phương trình bậc nhất và bất phương trình bậc hai

2.1. Bất phương trình bậc nhất

2.1.1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình có dạng :

$$ax + b > 0 \text{ hoặc } ax + b < 0, \quad a \neq 0.$$

2.1.2. Cách giải bất phương trình dạng $ax + b > 0$

- Nếu $a > 0$ thì $x > -\frac{b}{a}$

- Nếu $a = 0$ và $b > 0$ thì bất phương trình có dạng $0x + b > 0$ và mọi giá trị của x đều là nghiệm.

- Nếu $a = 0$ và $b \leq 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.

- Nếu $a < 0$ thì $x < -\frac{b}{a}$.

Ví dụ. Giải và biện luận bất phương trình

$$mx + 4 > 2x + m^2 \quad (1)$$

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow mx - 2x > m^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)x > (m - 2)(m + 2) \quad (2)$$

Nếu $m > 2$ thì $m - 2 > 0$. Khi đó $x > m + 2$.

Nếu $m = 2$ thì bất phương trình (2) có dạng $0x > 0$. Khi đó bất phương trình vô nghiệm.

Nếu $m < 2$ thì $m - 2 < 0$. Khi đó $x < m + 2$.

2.2. Bất phương trình bậc hai

2.2.1. Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai là bất phương trình có dạng :

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad a \neq 0 \text{ hoặc } ax^2 + bx + c < 0, \quad a \neq 0.$$

2.2.2. Cách giải

Định lí. Cho tam thức bậc 2 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$.

Nếu $\Delta < 0$ thì $af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ thì $af(x) > 0, \forall x \neq -\frac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$af(x) > 0, \forall x \notin [x_1, x_2]$$

$$af(x) < 0, \forall x \in (x_1, x_2).$$

3. Bất phương trình đại số bậc cao

3.1. Định lí. Giả sử

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n) \in \mathbb{R}[x] \text{ với } x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n.$$

Khi đó

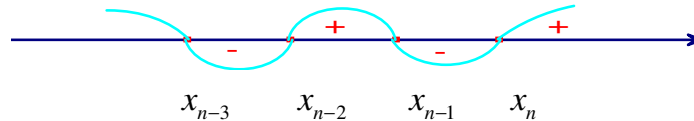
+) Nếu n là số lẻ thì $af(\alpha) > 0$ với mọi

$$\alpha \in (x_n, +\infty) \text{ hoặc } \alpha \in (x_{n-2k}, x_{n-2k+1}), 2k < n$$

+) Nếu n là số chẵn thì $af(\alpha) > 0$ với mọi $\alpha \in (x_n, +\infty)$ hoặc $\alpha \in (x_{n-2k}, x_{n-2k+1})$

hoặc $\alpha \in (-\infty, x_1), 2k < n$

Minh họa dấu của $af(x)$ trên trục số



3.2. Ví dụ. Giải bất phương trình sau

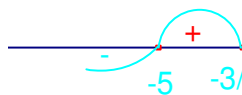
$$(2x+3)(1-x)(x+5)(x-3)^2(x^2-x+1) < 0 \quad (1)$$

Giải. Do $(x-3)^2 > 0$ và $x^2 - x + 1 > 0$ với mọi x nên

$$(1) \Leftrightarrow (2x+3)(1-x)(x+5) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1)(x+5) > 0$$

Ở đây ta có $x_1 = -5, x_2 = -\frac{3}{2}, x_3 = 1$. Dấu của $f(x)$ như sau:



Như vậy $f(x) > 0$ khi $x \in \left(-5, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-5, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

4. Bất phương trình tuyến tính hai ẩn

4.1. Định nghĩa. Bất phương trình tuyến tính hai ẩn là bất phương trình có dạng:

$$ax + by + c > 0, \quad a^2 + b^2 > 0.$$

Một cặp số (x_0, y_0) sao cho $ax_0 + by_0 + c > 0$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình.

Với các dấu $<, \leq, \geq$ ta sẽ có các bất phương trình tương ứng.

Ví dụ $3x + 2y + 1 > 0$, $x + 2 < 0$, $x + y < 0$, $2y - 5 > 0$ là các bất phương trình tuyến tính hai ẩn.

4.2. Cách giải

Cho bất phương trình $Ax + By + C > 0$ (1)

Nếu $A > 0$ và $B = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x > \frac{-C}{A}$

Nếu $A < 0$ và $B = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x < \frac{-C}{A}$

Nếu $B > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow y > \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$

Nếu $B < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow y < \frac{-A}{B}x - \frac{C}{B}$

Vì vậy ta chỉ cần xét các bất phương trình dạng

$$x > m, \quad x < m \quad \vee \quad y > ax + b, \quad y < ax + b$$

4.2.1. Định lí

a. Bất phương trình $x > m$ có tập nghiệm là $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > m, y \in \mathbb{R}\}$

S được biểu thị bởi nửa mặt phẳng bên phải đường thẳng $x = m$.

b. Bất phương trình $x < m$ có tập nghiệm là $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < m, y \in \mathbb{R}\}$

S được biểu thị bởi nửa mặt phẳng bên trái đường thẳng $x = m$.

c. Bất phương trình $y > ax + b$ có tập nghiệm là $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}, y > ax + b\}$

S được biểu thị bởi nửa mặt phẳng ở phía trên đường thẳng $(d): y = ax + b$.

d. Bất phương trình $y < ax + b$ có tập nghiệm là $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}, y < ax + b\}$ S

S được biểu thị bởi nửa mặt phẳng ở phía dưới đường thẳng $(d): y = ax + b$.

Chứng minh.

Ta có $M_0(x_0, y_0)$ thuộc đường thẳng (d) khi và chỉ khi

$$y_0 = ax_0 + b.$$

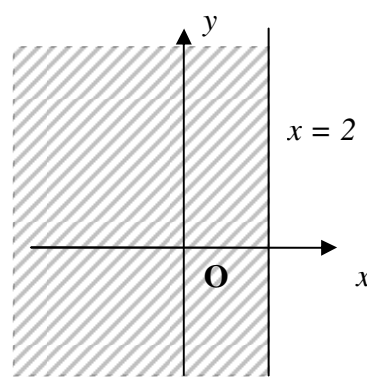
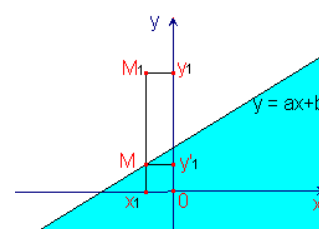
Cho $M_1(x_1, y_1)$. Điểm $M(x_1, y_1) \in (d)$. Điểm M_1 thuộc nửa mặt phẳng phía trên đường thẳng (d) khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y_1 &> y_1' \\ &\Leftrightarrow y_1 > ax_1 + b \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $y > ax + b$ được biểu thị bởi nửa mặt phẳng phía trên đường thẳng $y = ax + b$ trong mặt phẳng tọa độ.

b) Chứng minh tương tự.

Ví dụ. Tìm miền nghiệm của các bất phương trình:



- a) $3x - 6 > 0$,
 b) $-5y < 5$,
 c) $3x - 5y < 10$.

Giải.

a) $3x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là

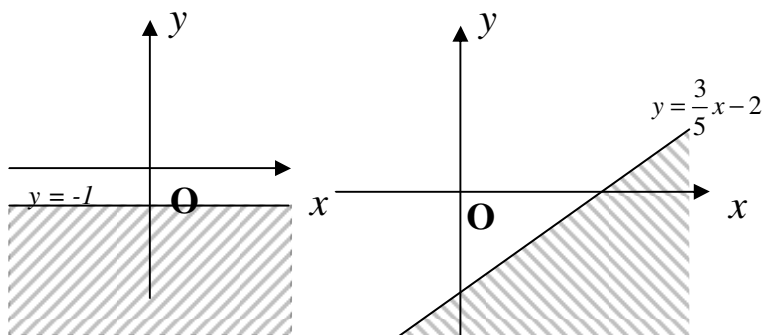
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 2, \forall y \in \mathbb{R}\}$$

b) $-5y < 5 \Leftrightarrow y > -1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -1, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

c) $3x - 5y < 10 \Leftrightarrow y > \frac{3}{5}x - 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{3}{5}x - 2, \forall x \in \mathbb{R}\}$.



ỨNG DỤNG TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Bài 1.

Tìm số tự nhiên x, biết :

- a) $x < 7$ b) $3 < x < 8$

Bài 2. (SGK/ toán 4)

Tìm số tròn chục x, biết : $58 < x < 97$

Bài 3.

Tìm x, biết $67 < x < 72$ và

- a) x là số chẵn
 b) x là số lẻ
 c) x là số tròn trọc

Bài 4. (SGK/ toán 4)

Tìm x, biết $33 < x < 51$ và x là số lẻ chia hết cho 5

Bài 5. (SGK/ toán 5)

Tìm số tự nhiên x, biết :

- a) $0,7 < x < 1,2$ b) $63,97 < x < 67,14$

Bài 6. (SGK/ toán 5)

Tìm số tự nhiên x, biết :

$$3,5 \times x < 9$$

Bài 7.

Tìm ba giá trị số của x sao cho :

$$5,9 < x < 6,3$$

3.2. Bài tập nâng cao vận dụng

Bài 1. Tìm số tự nhiên x biết :

a) $1,2 \times 4 < x < 2,3 \times 5$

b) $2,5 \times 4 < x < 4,2 \times 5$

Bài 2. Tìm x biết:

$$x + 3 < 127 - 121$$

Bài 3. Tìm số tự nhiên thích hợp thay vào x sao cho :

a) $7 - x < 5$

b) $13 - x > 7$

Bài 4. Tìm x biết:

$$3257 - x > 3287 - 3$$

Bài 5. Tìm x biết :

$$x + 145 < 145 + 5$$

Bài 6. Chọn số tự nhiên thích hợp thay vào x, y sao cho:

$$5 < x + y < 7 \text{ và } x < y$$

Bài 7. Thay x bởi chữ số thích hợp sao cho : $0,26 < 0,2x8 < 0,275$

Bài 8. Tìm 3 phân số $\frac{a}{b}$ sao cho :

$$\frac{2}{9} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$$

Bài 9. Tìm n, m là các số tự nhiên với $m < n < 10$ sao cho $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$

Bài 10. Tìm số tự nhiên n sao cho:

$$\frac{121}{27} \times \frac{54}{11} < n < \frac{100}{21} : \frac{25}{126}$$

BÀI TẬP

Bài 1.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12 < 0$

b) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x > 0$

c) $\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + 6x + 5} < 0,$

d) $\frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x^3 + 6x^2 + 5x - 12} < 0.$

Bài 2.

a) $5x - 1 < x - 3,$

b) $2y + 5 > 4 + 3y$

d) $5x + 4y + 8 > 0,$

c) $2x - 5y - 5 < 0,$

e) $\frac{2x-3}{2} + \frac{x-y}{4},$

f) $x + 1 - \frac{3x+y}{2} < 0.$

§5: HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. MỤC TIÊU.

1. Kiến thức

Giúp người học nắm vững

- Một số khái niệm hệ bất phương trình, hệ bất phương trình một ẩn, hệ bất phương trình tuyến tính

- Một số phương pháp giải hệ bất phương trình, phương pháp đồ thị.

- Hình thành các ý tưởng tiếp cận Toán học hiện đại cũng như có hiểu biết về các dạng toán dùng hệ bất phương trình và bất phương trình ở Tiểu học, ứng dụng giải hệ bất phương trình tuyến tính trong bài toán kinh tế.

2. Kĩ năng

- Giải các hệ bất phương trình theo các cách

- Giải các bài toán thực tế có liên quan tới hệ bất phương trình.

3. Thái độ

- Chủ động, sáng tạo, tập trung .

- Liên hệ thực tế với chương trình Toán ở Tiểu học.

II. NỘI DUNG

1. Định nghĩa

Nếu phải tìm nghiệm chùn của m bất phương trình :

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0,$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0,$$

.....

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0,$$

thì ta nói có hệ bất phương trình và kí hiệu

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 \end{array} \right.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình là giao của các tập nghiệm của m hệ bất phương trình trong hệ.

2. Hệ phương trình một ẩn

Ví dụ 1. Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x-1 > 5 & (1) \\ -3x+2 < 11 & (2) \\ 1-3x > 2x-19 & (3) \end{cases}$$

Giải. Ta có

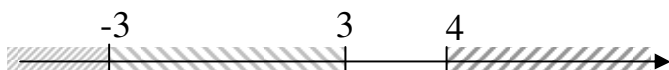
$$(1) \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3,$$

$$(2) \Leftrightarrow -3x < 9 \Leftrightarrow x > -3,$$

$$(3) \Leftrightarrow 5x < 20 \Leftrightarrow x < 4.$$

Vậy nghiệm của hệ là $3 < x < 4$.

Ta có thể biểu diễn và kết luận nghiệm qua trục số như sau:



3. Hệ bất phương trình tuyến tính hai ẩn.

Các định lí trong § 3 khẳng định tập nghiệm của một bất phương trình tuyến tính được biểu thị bằng một nửa mặt phẳng. Vì vậy nghiệm của một hệ bất phương trình nào đó sẽ là giao của những nửa mặt phẳng đó.

Ví dụ. Giải hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} x+2y \geq 5 \\ 3x-y \geq 2 \end{cases} \quad (I)$$

Giải. Chú ý các bước để giải hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

a. Đưa mỗi bất phương trình về dạng:

$$y > ax + b \quad (>, \leq, \geq)$$

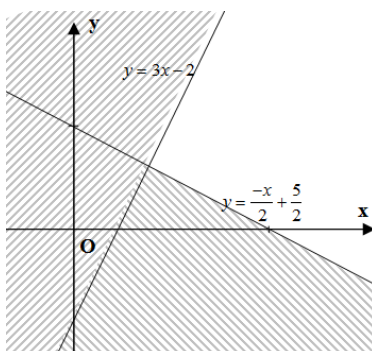
b. Vẽ các đường thẳng $y = ax + b$ tương ứng với mỗi bất phương trình đó.

c. Xác định miền nghiệm của bất phương trình bằng cách gạch bỏ đi miền không thích hợp.

d. Phần còn lại là miền nghiệm của hệ đã cho

$$\text{Ta có } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{-x}{2} + \frac{5}{2} & (1) \\ y \leq 3x - 2 & (2) \end{cases}$$

Ta có đồ thị



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền để trắng.

ỨNG DỤNG HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH TRONG BÀI TOÁN KINH TẾ

Giới thiệu bài toán kinh tế trong đó có sử dụng giải hệ phương trình tuyến tính hai ẩn.

Ví dụ 1. Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 chỉ làm việc một ngày không quá 4 giờ. Hãy đặt kế hoạch sản xuất sao cho tổng số tiền lãi cao nhất.

Chuyển các dữ liệu bài toán sang hệ phương trình. Sau đó giải hệ phương trình.

- Đặt các ẩn số
- Đặt các điều kiện cho bài Toán
- Lập hệ phương trình tương ứng.
- Giải hệ phương trình qua đồ thị.

Đáp án

Gọi x là số tấn sản phẩm I sản xuất trong một ngày, y là số tấn sản phẩm II sản xuất trong một ngày ($x \geq 0, y \geq 0$)

Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày nên ta có điều kiện: $3x + y \leq 6$.

Máy M_2 làm việc không quá 4 giờ trong một ngày nên ta có điều kiện: $x + y \leq 4$.

Tổng số tiền lãi

$$L = 2x + 1,6y \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy bài toán được đưa về việc tìm các số thực x, y thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -3x + 6 \\ y \leq -x + 4 \end{cases} \quad (I)$$

sao cho $f(x,y) = 2x + 1,6y$ là cực đại.

Ta có đồ thị: Miền nghiệm của hệ (I) là miền để trắng.

$f(x,y)$ đạt cực đại tại một trong các đỉnh của giác miền nghiệm.

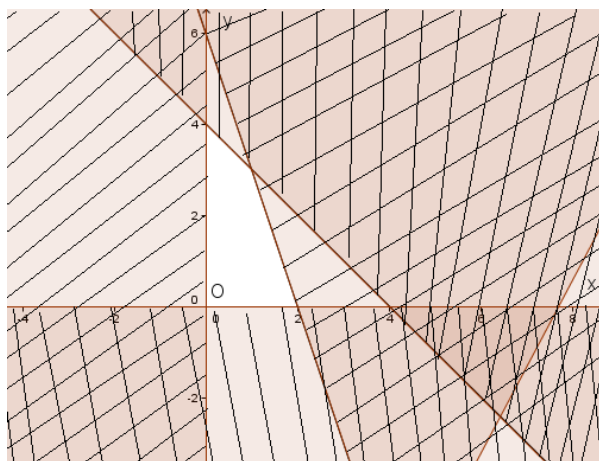
Các đỉnh của tứ giác có tọa độ là

$A(0,4), B(1,3), C(0,2), D(0,0)$.

Ta có

$$f(0,4) = 6,4, \quad f(1,3) = 5,8, \quad f(2,0) = 4, \quad f(0,0) = 0$$

Vậy ta thu được $x = 1, y = 3$ và $L = 6,8$ triệu đồng.



tứ

Ví dụ 2. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị prôtêin và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6kg thịt bò và 1,1kg thịt lợn, giá tiền 1kg thịt bò 45 nghìn đồng, 1kg thịt lợn 35 nghìn đồng. Giả sử gia đình này mua x kg thịt bò, y kg thịt lợn

a. Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi giải hệ đó.

b. Gọi T là số tiền phải trả cho x kg thịt bò và y kg thịt lợn. Hãy biểu diễn T theo x và y .

c. Hỏi gia đình đó phải chi phí mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để chi phí nhỏ nhất.

GV : nêu ví dụ và hướng dẫn SV thực hiện các bước giải bài Toán.

SV : Thực hiện các bước giải bài toán.

Đáp án

Các điều kiện của bài toán ta được hệ phương trình.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \end{cases} \quad (I)$$

Biểu diễn T theo các biến x, y ta có : $T = 45x + 35y$.

Như vậy bài toán trở thành tìm cực tiểu của T , trong đó x, y thỏa mãn hệ (I).

BÀI TẬP

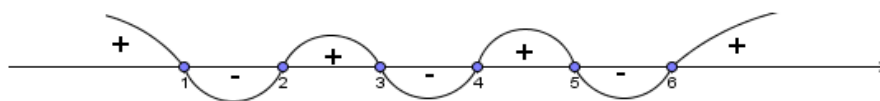
Bài 1. a)
$$\begin{cases} x^3 - 10x^2 + 27x - 18 > 0 \\ x^3 - 11x^2 + 38x - 40 \leq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6 \geq 0 \end{cases}$$

Chú ý: Người làm có thể mắc vào lỗi sai như sau

$$(I) \begin{cases} (x-1)(x-3)(x-6) > 0 \\ (x-2)(x-4)(x-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x-6)(x-2)(x-4)(x-5) \leq 0 \quad (I)$$

Biểu diễn nghiệm bất phương trình (II) ta có



Khi đó nghiệm của (II) là $1 < x \leq 2$ hoặc $3 < x \leq 4$ hoặc $5 \leq x < 6$.

Tập nghiệm của (I) khác (lớn hơn) tập nghiệm của (II).

(*) Sai : Ta chỉ có (I) $(I) \Rightarrow (II)$ nhưng không có $(II) \Rightarrow (I)$, như vậy tập nghiệm của (I) là con tập nghiệm của (II).

Bài 2. Giải hệ bất phương trình tuyến tính hai ẩn số bằng đồ thị.

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} 2x - 5y < 0 \\ 3x - y > 1 \end{cases} & b) \begin{cases} 4x + 2y - 6 < 0 \\ x + y \geq 3 \end{cases} \\ c) \begin{cases} x > 0 \\ 3x + y > 5 \\ 2x - y > 3 \end{cases} & d) \begin{cases} x + y > 4 \\ 3x - 2y < 2 \\ 3x + y > -4 \end{cases} \end{array}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Trần Diên Hiên. Thực hành giải toán tiểu học, NXB ĐH Sư phạm, 2004
- [2]. Đỗ Đình Hoan và tập thể tác giả. Toán lớp 1 – lớp 5, NXB Giáo dục, 2004.
- [3]. Trần Diên Hiên, Bùi Duy Hiên. Các tập hợp số, NXB Đại học Sư phạm, 2007.
- [4]. Hoàng Xuân Sính, Trần Phương Dung. Đại số đại cương, NXB Đại học Sư phạm, 2006.
- [5]. Nguyễn Tiến Tài. Cơ sở số học, NXB Giáo dục, 2005.
- [6]. Nguyễn Duy Thuận, Nguyễn Mạnh Trinh. Đại số, NXB Giáo dục, 1998.